~~J. M. Britton~~
Queens' College
Cambridge
May 192

Purchased by Heman Burr Leonard
June 24, 1931.

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

17823 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

Jules TANNERY,
Sous-Directeur des Études scientifiques
à l'École Normale supérieure.

Jules MOLK,
Professeur à la Faculté des Sciences
de Nancy.

TOME I.

INTRODUCTION. — CALCUL DIFFÉRENTIEL (Ire Partie).

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

PRÉFACE.

Nous désirons, avant tout, expliquer pourquoi nous avons osé écrire un livre sur les fonctions elliptiques, si peu de temps après la publication du Traité que l'on doit à Halphen. Il va sans dire que nous n'avons point la prétention de remplacer ou d'égaler l'œuvre de ce Maître; celle-ci est inachevée; mais la partie qui reste incomplète, qui était attendue avec impatience par ceux qui aiment la Science pour elle-même et pour sa beauté propre, n'aurait pu avoir qu'un nombre restreint de lecteurs, que peuvent contenter, dans une certaine mesure, les beaux fragments publiés par M. Stieltjes : il ne nous appartient pas de compléter l'œuvre d'Halphen.

C'est un livre beaucoup plus élémentaire que nous avons tenté d'écrire; ce sont les étudiants de nos Facultés que nous avions en vue : nous avons essayé de faire un livre qui se raccordât avec l'enseignement qui leur est donné; s'ils peuvent, après nous avoir lus, traiter des applications faciles et les pousser jusqu'au bout; si quelques-uns d'entre eux complètent leurs connaissances dans le livre d'Halphen, s'ils étudient en particulier les belles applications qui remplissent le second volume, s'ils se retrouvent sans peine dans les *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* que M. Schwarz publie d'après les leçons et les notations de M. Weierstrass, s'ils lisent les Mémoires fondamentaux d'Abel et de Jacobi, s'ils pénètrent enfin dans la riche et admirable littérature des fonctions elliptiques et prennent en particulier connaissance des recherches de Kronecker et de M. Hermite, nous aurons entièrement atteint notre but.

Il nous reste à faire connaître l'ordre que nous avons suivi.

Nous avons réuni dans une *Introduction* les éléments de la théorie des séries et des produits infinis qui nous ont paru indispensables. Les propositions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire qui se déduisent de la considération des intégrales prises entre des limites imaginaires, propositions dont nous ferons largement usage, ont été, dans cette Introduction, systématiquement laissées de côté : elles sont, depuis longtemps, inscrites dans le programme de la licence ès Sciences mathématiques ; elles sont partout très bien enseignées et sont développées dans d'excellents livres, qui sont bien connus. On insiste souvent moins sur le rôle que jouent, dans la théorie des fonctions, les séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable, bien que Cauchy ait mis pleinement ce rôle en lumière [1]. Il nous importait surtout d'exposer avec détail quelques uns des résultats essentiels obtenus par M. Weierstrass. Cette Introduction, nous espérons que beaucoup de nos lecteurs pourront se dispenser de la lire en entier ; mais si, dans la suite, ils ont quelque inquiétude sur la rigueur de certaines démonstrations et transformations, ils pourront y recourir.

Nous introduisons immédiatement la fonction σu sous forme de produit infini. Cette voie directe, qui est celle de M. Weierstrass, nous a paru naturelle et facile dans l'état actuel de l'enseignement. Les propriétés essentielles de cette fonction et de celles qui en dérivent sont développées dans le présent volume. Le volume suivant contiendra la théorie des fonctions ϑ et les théorèmes généraux sur les fonctions doublement périodiques, déduits pour la plupart de la proposition célèbre de M. Hermite sur la décomposition en éléments simples. Il terminera ce qui se rapporte au *Calcul différentiel*. Nous exposerons dans le Tome III le problème de l'inversion, les théories et les procédés qui concernent l'intégration. Enfin, dans le dernier Volume, nous déve-

[1] Il y a déjà longtemps que M. Méray l'a exposé d'une façon systématique dans son *Précis d'Analyse infinitésimale* et dans une suite de beaux Mémoires

lopperons quelques applications, d'une nature élémentaire, se rapportant à des branches diverses de la Science.

Un des ennuis de la théorie des fonctions elliptiques est dans la richesse même des formules qu'elle comporte et que la mémoire semble incapable de fixer. Il faut pouvoir renvoyer à ces formules et les retrouver facilement; nous avons adopté, pour les plus importantes, un système de numérotage auquel nous prions le lecteur de vouloir bien s'accoutumer. Il les retrouvera toutes, avec leurs numéros, dans un Tableau dont la première partie paraîtra à la fin du *Calcul différentiel :* ce Tableau constituera comme un résumé de la Théorie et facilitera beaucoup, nous l'espérons, la lecture et l'usage de notre livre.

Les notations que nous avons adoptées au début sont, sauf quelques légères modifications sur lesquelles nous nous expliquerons tout à l'heure, celles de M. Weierstrass; mais nous n'avons pas cru devoir nous borner aux fonctions qu'il a introduites. Ces fonctions sont, d'une part, très propres à traiter de la façon la plus simple beaucoup d'applications, beaucoup de celles, en particulier, qui se rapportent à la Géométrie et à la Mécanique. D'autre part, elles se prêtent très bien, en raison même de la façon symétrique dont les périodes y figurent, à l'exposition d'un très grand nombre de propriétés, qui peuvent être regardées comme véritablement élémentaires. Il nous a donc paru qu'elles constituaient un excellent point de départ. Mais, d'un autre côté, bien des propriétés, et des plus importantes, tant en Algèbre qu'en Arithmétique, n'apparaissent que lorsqu'on sépare les périodes : elles restent cachées là où les périodes sont engagées d'une façon symétrique. Là où importe cette séparation des périodes, d'autres notations reprennent l'avantage. Nous avons donc cru devoir laisser une place considérable à ces fonctions de Jacobi, dont on a dit qu'elles ne joueraient plus qu'un rôle historique : à la vérité, ce rôle serait encore assez beau. Il ne faudrait pas s'étonner si la multiplicité des notations se trouvait être dans la nature des choses et s'il convenait d'en changer suivant les questions que l'on aborde. Il semble d'abord que cette multipli-

cité soit une gêne et un ennui, il se peut qu'elle soit une richesse. Quoi qu'il en soit, nous avons mis tous nos soins à bien expliquer comment les diverses notations se raccordent les unes aux autres et à faciliter la lecture des principaux Mémoires et Traités.

C'est le désir d'une parfaite symétrie qui nous a conduits à écrire ω_1, ω_2, ω_3 là où M. Weierstrass écrit ω, $-\omega''$, ω'. Cette modification n'altère pas les fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$: elle permet de condenser singulièrement les formules et d'en écrire une seule lorsque, autrement, il faut en écrire trois. Ce changement présente quelque inconvénient (¹) : le plus grand, à nos yeux, est d'obliger à quelque attention le lecteur qui voudra se reporter aux *Formeln und Lehrsätze* (²) de M. Schwarz. C'est au lecteur à juger si les raisons de symétrie, qui nous ont décidés et qui sont évidentes, étaient assez fortes pour que nous nous permissions de nous mettre un peu en désaccord avec cette belle publication, qui présente, à tant d'égards, un caractère définitif : c'est après bien des hésitations que nous nous sommes résolus à ce léger changement.

Paris, le 29 octobre 1892.

Le lecteur, qui voulant se borner à un aperçu de la théorie et acquérir seulement les notions indispensables aux applications élémentaires des fonctions elliptiques à la Mécanique, pourra, dans la partie du Calcul différentiel contenue dans ce Volume, se dispenser de lire les nos 96, 116, 117, 119 et s'arrêter à la fin du n° 122.

(¹) *Voir* la note de la page 202.

(²) Voici le titre de l'édition française de ce Recueil : *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques, d'après des leçons et des notes manuscrites de M. K. Weierstrass.*

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

INTRODUCTION.

CHAPITRE I.

Des séries et produits infinis à termes constants.

CHAPITRE II.

Des séries et des produits infinis dont les termes dépendent d'une variable.

CHAPITRE III.

Fonctions transcendantes entières.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

(1re PARTIE)

CHAPITRE I.

Considérations générales sur les fonctions périodiques.

CHAPITRE II.

La fonction σu et les fonctions qui en dérivent.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

ERRATA.

Page 186, ligne 13, *au lieu de* $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, *lire* $\frac{\omega_3}{\omega_1 i}$.

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

INTRODUCTION.

CHAPITRE I.

DES SÉRIES ET PRODUITS INFINIS A TERMES CONSTANTS.

I. — Séries et produits infinis à simple entrée.

1. Si a désigne un nombre réel ou imaginaire, nous emploierons l'expression *valeur absolue* de a, que l'on réserve d'ordinaire au cas où a est réel, avec le sens que l'on donne habituellement, dans la théorie des nombres imaginaires, au mot *module,* qui a, ailleurs, des significations diverses : cette valeur absolue sera désignée par le symbole $|a|$.

Nous supposons connues les propositions élémentaires relatives aux séries à termes réels ou imaginaires, la notion de convergence absolue, la possibilité de changer l'ordre des termes dans une série absolument convergente et de grouper comme l'on veut les termes d'une pareille série, chaque groupe ne comprenant qu'un nombre fini de termes, enfin les règles relatives à l'addition et à la multiplication des séries.

Nous désignerons par le symbole

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n$$

la *somme* d'une série convergente

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Nous aurons souvent à considérer des suites de termes dans lesquels l'*indice*, qui sert à distinguer les termes, peut prendre des valeurs entières *positives, nulles* ou *négatives :* une telle suite est donnée quand on se donne la loi qui détermine chaque terme en fonction de l'indice.

Supposons essentiellement que les deux séries

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 \;\, + a_2 \;\, + \ldots + a_n \;\, + \ldots, \\ &\phantom{a_0 +{}} a_{-1} + a_{-2} + \ldots + a_{-n} + \ldots \end{aligned}$$

soient absolument convergentes; nous représenterons alors par l'un ou l'autre des symboles

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n, \quad \sum_n a_n$$

le nombre obtenu en ajoutant les sommes de ces deux séries; c'est encore, si l'on veut, la somme de la série

$$a_0 + (a_1 + a_{-1}) + (a_2 + a_{-2}) + \ldots + (a_n + a_{-n}) + \ldots,$$

dont le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme est $a_n + a_{-n}$. On pourrait d'ailleurs grouper les termes d'une infinité de manières.

On a besoin quelquefois d'exclure de la sommation un ou plusieurs termes de la suite, le terme a_0 par exemple : on emploie alors des signes particuliers que nous indiquerons plus tard.

Il peut être utile de faire observer que la façon dont nous avons précisé la signification des précédents symboles rend incorrectes quelques expressions dont l'usage est courant et dont nous nous servirons nous-mêmes à l'occasion quand elles ne pourront causer

aucune ambiguïté : dire que la série

$$\sum_n a_n$$

est convergente ou absolument convergente semble inutile, puisque, autrement, l'emploi du symbole serait illégitime : dire que cette série est divergente est encore plus incorrect. Dans ces façons de parler, ce n'est pas à la *somme* de la série qu'il faut penser, mais uniquement à la *loi de succession* des termes de la série. Pour que le langage fût irréprochable, il faudrait employer des mots différents.

2. Nous allons donner maintenant les propositions élémentaires relatives aux produits infinis (¹).

Considérons la suite infinie

$$1+a_1, \quad 1+a_2, \quad \ldots, \quad 1+a_n, \quad \ldots$$

et posons

$$P_n = (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

On aura évidemment

$$P_n - P_{n-1} = a_n P_{n-1},$$

$$P_n = 1 + a_1 + a_2 P_1 + a_3 P_2 + \ldots + a_n P_{n-1},$$

de sorte que, n grandissant indéfiniment, P_n tendra ou non vers une limite suivant que la série

$$1 + a_1 + a_2 P_1 + \ldots + a_n P_{n-1} + a_{n+1} P_n + \ldots$$

sera convergente ou non, et cette limite, si elle existe, sera la somme de la série.

Si cette série est convergente, le *produit infini*

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots$$

a donc un sens et l'on peut lui donner pour *valeur* la somme de

---

(¹) On peut consulter sur ce sujet le *Traité d'Analyse* de Cauchy et le Mémoire de M. Weierstrass : *Ueber die Theorie der analytischen Functionen* (*Crelle,* t. 51); nous empruntons l'emploi de la série que nous nommons *équivalente* à M. Mittag-Leffler (*Acta mathematica,* t. I, p. 30).

la série : cette série est dite *équivalente* au produit infini; a_1, a_2, ..., a_n, ... sont les *termes* du produit infini; $1+a_1$, $1+a_2$, ..., $1+a_n$, ... en sont les *facteurs*. Toutefois, afin de conserver aux produits infinis les propriétés essentielles d'un nombre limité de facteurs, nous ne laisserons pas à la notion de produit infini la généralité qui précède.

3. Avant de préciser les restrictions qui vont être apportées à cette notion, considérons le cas où chacun des termes a_n est réel, positif ou nul. Les nombres P_1, P_2, ..., P_n, ... sont alors positifs et au moins égaux à un; la série à termes positifs, équivalente au produit infini

$$1+a_1+a_2P_1+\ldots+a_nP_{n-1}+\ldots,$$

ne peut être convergente que si la série

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

est elle-même convergente. Réciproquement, si cette dernière série est convergente, P_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

En effet, lorsque n augmente, P_n ne peut qu'augmenter; afin de prouver que P_n a une limite pour n infini, il suffit donc de prouver que P_n reste toujours inférieur à un nombre fixe. Or imaginons qu'on développe le produit

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$$

et qu'on l'écrive

$$1+a_1+a_2+\ldots+a_n+a_1a_2+\ldots+a_1a_2\ldots a_n;$$

en posant

$$A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

et en désignant par A la somme de la série convergente

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots,$$

on voit de suite que l'on a

$$P_n<1+\frac{A_n}{1}+\frac{A_n^2}{1.2}+\ldots+\frac{A_n^n}{1.2\ldots n}<e^{A_n}<e^{A},$$

et la proposition est ainsi démontrée. Il est à peine utile de dire que la série équivalente au produit infini, dans laquelle la somme des $n+1$ premiers termes est égale à P_n, est alors convergente.

Ainsi, lorsque les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont positifs ou nuls, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$P_n = (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$$

ait une limite pour n infini est que la série

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

soit convergente. S'il en est ainsi, cette limite, qui est la valeur du produit infini

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots,$$

se représente par le symbole

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n).$$

4. En supposant qu'on se trouve dans les conditions précédentes, nous allons démontrer que la valeur du produit infini est indépendante de l'ordre de ses facteurs.

Supposons, en effet, que, en rangeant d'une façon quelconque les termes (tous positifs) de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

on obtienne la suite

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots,$$

et soit

$$P = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n).$$

Le produit d'autant de facteurs que l'on voudra pris, chacun une fois, parmi les nombres $1+a_n$ ou $1+b_n$, est inférieur à P; donc le produit infini dont le $n^{\text{ième}}$ facteur est $1+b_n$ est convergent et sa valeur est au plus égale à P. D'autre part, si l'on choisit arbitrairement un nombre Q plus petit que P, on peut déterminer un

entier positif h tel que le produit

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_h)$$

soit plus grand que Q; si la suite

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_k$$

contient tous les termes de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_h,$$

le produit

$$(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_k)$$

dépassera Q; donc la valeur du produit infini

$$(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n)\ldots$$

dépasse Q : elle est donc égale à P.

5. Supposons maintenant que $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ soient des nombres quelconques, réels ou imaginaires : nous dirons que le produit infini

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots$$

est *absolument convergent,* si la série

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

est absolument convergente.

Nous allons montrer que le produit P_n des n premiers facteurs d'un produit infini absolument convergent tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. Cette limite, qui est la valeur du produit infini, se représente encore par le symbole

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n).$$

Nous montrerons, en outre, que cette valeur ne dépend pas de l'ordre des facteurs et qu'elle ne peut être nulle que si l'un des facteurs est nul. Nous emploierons d'ailleurs, pour les produits infinis comme pour les séries, les mêmes expressions incorrectes (n° 1) consacrées par l'usage.

6. Faisons d'abord la remarque suivante : Si, dans un polynome entier en $a_1, a_2, \ldots, a_n$, à coefficients réels et positifs, on remplace $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par leurs valeurs absolues, on obtiendra la somme des valeurs absolues des termes de ce polynome, et cette somme sera supérieure ou égale à la valeur absolue du polynome. Or le polynome

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_1 a_2 + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n,$$

que l'on obtient en effectuant le développement de P_n, a ses coefficients positifs : de même, si m désigne un entier plus grand que n, on voit de suite que le développement effectué de P_m contient, outre les termes qui figurent dans P_n, d'autres termes à coefficients positifs ; il en résulte que, si l'on regarde $P_m - P_n$ comme un polynome développé et réduit, les coefficients de ce polynome seront positifs. De là résultent les conséquences suivantes :

Si l'on désigne en général par P'_n le résultat obtenu en remplaçant, dans P_n, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par leurs valeurs absolues, on aura

$$P'_n \geqq |P_n|, \qquad P'_m - P'_n \geqq |P_m - P_n| \qquad (m > n);$$

il est à peine utile de dire que $P'_m - P'_n$ est positif ou nul. Des inégalités analogues ont évidemment lieu, si l'on considère, à la place de P_m, P_n, des produits formés avec un nombre fini de facteurs pris dans le produit infini, mais qui ne sont pas les premiers facteurs de ce produit, pourvu que la première expression contienne tous les facteurs qui figurent dans la seconde.

Ceci posé, puisqu'on suppose convergente la série à termes positifs ou nuls

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |a_n|,$$

le produit infini, à termes positifs ou nuls,

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + |a_n|)$$

est convergent : soit P' sa valeur. Puisque P'_n admet une limite pour n infini, à chaque nombre positif ε correspond un entier po-

sitif p, tel que l'on ait

$$P'_\mu - P'_\nu < \varepsilon$$

sous les seules conditions

$$\mu > \nu \geqq p;$$

on en conclut, d'après la remarque précédente, que, sous les mêmes conditions, on a

$$|P_\mu - P_\nu| < \varepsilon$$

et, par conséquent, P_n admet une limite pour n infini. C'est la première des propositions annoncées.

7. Cette limite est indépendante de l'ordre des facteurs.

Supposons en effet que, en rangeant autrement les termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, on obtienne la suite $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + |b_n|)$$

sera convergent et aura pour valeur P' (n° 4); désignons en général par Q'_n le produit de ses n premiers facteurs et par Q_n le produit des n premiers facteurs du produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + b_n),$$

produit infini qui est absolument convergent puisque la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |b_n|$$

est convergente, et dont il faut montrer que la valeur est égale à celle du produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + a_n).$$

Puisque les deux produits infinis

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + |a_n|), \quad \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + |b_n|)$$

ont la même valeur, on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε un entier positif p tel que l'on ait

$$|Q'_\mu - P'_\nu| < \varepsilon$$

sous les seules conditions $\mu > p$, $\nu > p$. Or si l'on suppose μ assez grand pour que tous les facteurs qui figurent dans P'_ν figurent aussi dans Q'_μ, on aura, d'après une remarque antérieure,

$$|Q_\mu - P_\nu| < Q'_\mu - P'_\nu$$

et, par suite,

$$|Q_\mu - P_\nu| < \varepsilon.$$

Si donc l'on fait croître μ indéfiniment, on aura, en désignant par Q la limite de Q_μ pour μ infini,

$$|Q - P_\nu| \leqq \varepsilon,$$

et enfin, en faisant croître ν indéfiniment,

$$|Q - P| \leqq \varepsilon.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

8. Il reste enfin à prouver que, si la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |a_n|$$

est convergente, le produit infini

$$P = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + a_n)$$

ne peut être nul que si l'un de ses facteurs est nul.

Supposons d'abord que l'on ait, quel que soit n,

$$|a_n| < 1;$$

nous allons montrer que P ne peut être nul. On a, en effet, en conservant toujours les mêmes notations,

$$\frac{1}{P_n} = \left(1 - \frac{a_1}{1 + a_1}\right)\left(1 - \frac{a_2}{1 + a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\right);$$

d'ailleurs le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)$$

est absolument convergent : en effet, les séries à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|,\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}|a_n|$$

sont convergentes en même temps, puisque le rapport des termes de rang n dans ces deux séries est $|1+a_n|$, quantité qui a pour limite l'unité quand n augmente indéfiniment. Il résulte de là que le produit des n premiers facteurs de ce produit infini tend vers une limite; par conséquent, P_n tend vers une limite *qui n'est pas nulle;* c'est ce qu'il fallait établir.

Ne faisons maintenant aucune restriction sur les facteurs $1+a_n$, en supposant toujours convergente la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}|a_n|.$$

Si l'on suppose $m>n$, on a évidemment

$$P_m=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\times(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\ldots(1+a_m),$$

d'où, en faisant grandir m indéfiniment,

$$P=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1+a_{n+\nu});$$

or, puisque l'on a

$$\lim_{\mu=\infty}.\, a_\mu=0,$$

on peut prendre n assez grand pour que l'on ait, quel que soit ν,

$$|a_{n+\nu}|<1;$$

dès lors le produit infini

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1+a_{n+\nu})$$

aura une valeur différente de zéro; P ne pourra donc être nul que si le produit

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$$

est nul, et, par conséquent, si l'un des facteurs

$$1+a_1, \quad 1+a_2, \quad \dots, \quad 1+a_n$$

est nul. C'est ce qu'il fallait démontrer.

9. Nous ajouterons encore la remarque suivante, relative à la possibilité de grouper les facteurs d'un produit infini absolument convergent.

Tout d'abord, si $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sont des nombres positifs ou nuls, on aperçoit immédiatement la vérité de la proposition suivante :

Soient $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ des entiers positifs croissants; posons

$$\begin{array}{l}
(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n_1}) = 1+b_1, \\
(1+a_{n_1+1})(1+a_{n_1+2})\dots(1+a_{n_2}) = 1+b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
(1+a_{n_{p-1}+1})(1+a_{n_{p-1}+2})\dots(1+a_{n_p}) = 1+b_p, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Si le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n)$$

est convergent, il en sera de même du produit infini

$$\prod_{p=1}^{p=\infty}(1+b_p)$$

et les deux produits infinis auront la même valeur. C'est une conséquence immédiate des définitions.

Supposons ensuite que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n)$$

soit absolument convergent, les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

étant d'ailleurs réels ou imaginaires, et désignons par $1+B_1$, $1+B_2, \ldots, 1+B_p, \ldots$ ce que deviennent les premiers membres des égalités qui définissent $1+b_1$, $1+b_2, \ldots, 1+b_p, \ldots$ quand on y remplace $a_1, a_2, \ldots, a_{np}, \ldots$ par leurs valeurs absolues.

L'égalité

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} + a_1 a_2 + \ldots$$

et les égalités analogues montrent que l'on a

$$B_\alpha \geqq |b_\alpha| \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Le produit infini

$$\prod_{p=1}^{p=\infty} (1 + |a_p|)$$

étant convergent par hypothèse, il en sera de même, en vertu de ce qui a été établi plus haut, du produit infini

$$\prod_{p=1}^{p=\infty} (1 + B_p);$$

la convergence de la série

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} B_p,$$

qui résulte de la convergence du produit infini précédent, entraîne la convergence de la série

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} |b_p|;$$

on voit donc d'abord que le produit infini

$$\prod_{p=1}^{p=\infty} (1 + b_p)$$

est absolument convergent. Mais il est manifeste que le produit des p premiers facteurs de ce produit infini, qui est formé des n_p premiers facteurs du produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + a_n),$$

ne peut avoir d'autre limite que la valeur de ce dernier produit infini; on peut donc, dans ce produit infini, grouper les facteurs comme il a été expliqué. D'ailleurs, puisque, dans un produit infini absolument convergent, on peut changer l'ordre des facteurs, on voit que le groupement des facteurs peut être fait d'une façon arbitraire, pourvu que chaque groupe ne contienne qu'un nombre limité de facteurs.

10. Ainsi les propriétés essentielles des produits d'un nombre limité de facteurs se conservent dans les produits infinis absolument convergents. Il n'en est pas de même des produits infinis qui ne sont pas absolument convergents. C'est pourquoi nous ne considérerons ici que des produits infinis absolument convergents et c'est là la restriction que nous avons annoncée.

Nous adopterons pour les produits infinis absolument convergents des notations analogues à celles que nous avons adoptées pour les séries. Ainsi, si les deux séries

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$a_{-1} + a_{-2} + \ldots + a_{-n} + \ldots$$

sont absolument convergentes, nous représenterons par le symbole

$$\prod_n (1 + a_n)$$

le produit des valeurs des deux produits infinis

$$\prod_{n=0}^{n=\infty} (1 + a_n), \quad \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + a_{-n});$$

on aura d'ailleurs

$$\prod_n (1 + a_n) = (1 + a_0) \prod_{n=1}^{n=\infty} [(1 + a_n)(1 + a_{-n})]$$

et l'on pourrait adopter une infinité d'autres modes de groupement des facteurs.

II. — Séries à double entrée.

11. Nous avons considéré jusqu'ici des suites

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

de nombres qui dépendent uniquement d'un indice, chaque indice indiquant le rang que le nombre qui en dépend occupe dans la suite : nous allons maintenant considérer des ensembles infinis de nombres dont chacun dépend de *deux* indices ; un quelconque de ces nombres sera représenté, par exemple, par le symbole $a_{\alpha,\beta}$, α, β étant des nombres entiers. Donner un pareil ensemble, c'est donner la loi qui détermine un terme quelconque lorsque l'on connaît ses deux indices et leur ordre. On peut d'ailleurs supposer, sur les indices α, β, qu'ils peuvent prendre indépendamment toutes les valeurs entières et positives, ou toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives ; on peut aussi supposer que l'un d'eux ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ou encore convenir d'exclure telles combinaisons d'indices que l'on voudra, d'après une loi arbitraire.

Si l'on imagine un plan indéfini décomposé en carrés par des parallèles à deux axes rectangulaires, distantes de l'unité de longueur, de telle façon, par exemple, que le centre de l'un des carrés soit à l'origine et que les coordonnées de tous les autres centres soient deux quelconques des nombres $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; on peut inscrire chaque nombre $a_{\alpha,\beta}$ dans celui des carrés dont le centre a pour abscisse α et pour ordonnée β ; on aura ainsi constitué un *tableau à double entrée ;* des cases en nombre fini ou infini peuvent d'ailleurs rester vides.

12. Il convient tout d'abord de remarquer qu'un tableau à double entrée ne constitue pas quelque chose d'essentiellement distinct d'une suite indéfinie de nombres *rangés linéairement,* ou dont chacun ne dépend que d'un indice (¹). En d'autres termes, étant donné un tableau à double entrée de nombres $a_{\alpha,\beta}$, on peut en ranger les éléments dans une suite linéaire $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

(¹) C'est là un cas particulier de propositions générales développées par M. Cantor.

de telle façon qu'on puisse trouver pour chaque élément $a_{\alpha,\beta}$ du tableau le terme b_n qui lui est égal et réciproquement.

Considérons, en effet, les divers systèmes [1] non exclus de deux nombres entiers (α, β); nous allons montrer qu'on peut établir entre ces systèmes et les nombres entiers positifs $1, 2, \ldots, n, \ldots$ une correspondance telle que, à chaque système, corresponde un entier positif et un seul et que, à chaque nombre entier positif, corresponde un système non exclu et un seul; une correspondance satisfaisant à ces conditions est dite *univoque* et *réciproque*. Cette correspondance établie, il suffira de convenir que l'on a

$$a_{\alpha,\beta} = b_n$$

toutes les fois que le système (α, β) et l'entier positif n se correspondent, pour avoir transformé le tableau à double entrée en une suite linéaire, ou la suite linéaire en un tableau à double entrée.

Quant à la possibilité d'établir une telle correspondance, on la mettra en évidence, si l'on veut, comme il suit.

Essayant de ranger sur une même ligne tous les systèmes différents non exclus, on conviendra, par exemple, de placer sur cette ligne le système (α, β) avant le système (α', β') si la somme des valeurs absolues des nombres α, β est inférieure à la somme des valeurs absolues des nombres α', β'; il ne restera plus alors qu'à indiquer comment on range sur cette ligne ceux des systèmes non exclus pour lesquels la somme des valeurs absolues des nombres qui les composent est égale à un nombre entier positif donné N. Or ces systèmes sont en nombre évidemment fini, et l'on pourra adopter pour les ranger telle loi que l'on voudra; en supposant, par exemple, que l'on ait

$$|\alpha| + |\beta| = |\alpha'| + |\beta'|,$$

on pourra convenir de placer le système (α, β) avant le système (α', β') si la première des différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$ qui n'est pas nulle est positive. Dès lors tous les systèmes possibles sont rangés

---

(1) Nous entendons par *système* de deux nombres l'ensemble de ces deux nombres, ensemble dans lequel il faut tenir compte de l'ordre de ces nombres. Deux systèmes de deux nombres sont identiques si les éléments de ces systèmes sont les mêmes et sont rangés dans le même ordre.

d'une façon déterminée; d'abord vient le système (0, 0) s'il n'est pas exclu, puis les systèmes $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, puis ceux pour lesquels la somme des valeurs absolues des éléments est égale à deux, puis les systèmes pour lesquels cette somme est égale à trois, etc.; il suffit maintenant de faire correspondre chaque système à son rang dans la suite linéaire ainsi formée pour réaliser la correspondance univoque et réciproque dont il a été parlé plus haut.

On voit tout ce qu'il y a d'arbitraire dans la façon dont on a établi cette correspondance et il est manifeste qu'elle aurait pu être établie d'une infinité d'autres façons. En particulier, la représentation géométrique qui a été décrite précédemment fournit aisément des moyens de réaliser cette correspondance ou, ce qui revient au même, de désigner sans ambiguïté chaque case du tableau par un seul entier positif au lieu de la désigner par les deux entiers α, β qui sont les coordonnées de son centre; on donnera, par exemple, le n° 1 à la case (0, 0) qui contient l'origine; puis, tournant une première fois autour de cette case à partir du carré qui a son centre sur la partie positive de l'axe des x, on affectera des n^{os} 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les huit cases $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$; puis, tournant une seconde fois autour des cases précédentes, on donnera les n^{os} 10, 11, ..., 25 aux seize cases $(2, 0)$, $(2, 1)$, ..., $(2, -1)$. On continuera de la même façon; au $r^{\text{ième}}$ tour on affectera des n^{os}

$$(2r-1)^2+1, \quad (2r-1)^2+2, \quad \ldots, \quad (2r+1)^2,$$

les $8r$ cases que l'on rencontre.

Dans tous les ensembles de nombres $a_{\alpha,\beta}$ que nous considérons, nous supposerons toujours, pour simplifier le langage, que les indices α, β puissent prendre toutes les valeurs entières positives, nulles et négatives, sans exclusion. On devra alors poser $a_{\alpha,\beta}=0$ quand le système particulier (α, β) est exclu, ou bien, si l'on préfère ne pas introduire ces termes nuls, on supprimera, dans les sommations dont il va être question, les termes $a_{\alpha,\beta}$ qui correspondent aux systèmes d'indices (α, β) exclus.

13. Soit donc un ensemble de nombres $a_{\alpha,\beta}$. Supposons qu'on ait adopté entre les divers systèmes (α, β) formés avec deux nombres

entiers positifs, nuls ou négatifs et les nombres entiers positifs 1, 2, ..., n, ... une correspondance univoque et réciproque telle que l'une de celles qui ont été décrites plus haut, puis que l'on fasse

$$a_{\alpha,\beta} = b_n$$

toutes les fois que le système (α, β) et le nombre n se correspondent; alors la suite linéaire

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots$$

contiendra une fois chacun des nombres $a_{\alpha,\beta}$ et ne contiendra pas d'autres nombres.

Inversement, étant donnée une pareille suite linéaire, on peut en disposer les éléments dans un tableau à double entrée.

Supposons d'abord que tous les nombres $a_{\alpha,\beta}$ et, par suite, tous les nombres b_n soient positifs ou nuls.

On dira que ces nombres $a_{\alpha,\beta}$ sont les *termes* d'une *série convergente à double entrée,* si la somme d'autant de termes que l'on veut pris parmi ces nombres, chacun n'étant pris qu'une fois, reste toujours inférieure à un nombre fixe A; dès lors il est clair que la série à termes positifs ou nuls

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

est convergente et que sa somme S est au plus égale à A.

Réciproquement, si cette dernière série est convergente et a pour somme S, la série à double entrée est aussi convergente, d'après la définition précédente, puisque la somme d'autant de termes que l'on veut pris dans le tableau à double entrée est inférieure à S. On peut d'ailleurs prendre, dans la suite b_1, b_2, ..., b_n, ..., ou dans le tableau, assez de termes pour que leur somme dépasse tel nombre que l'on voudra, inférieur à S. Il en résulte que la somme S est indépendante du mode spécial de correspondance que l'on a adopté entre les systèmes (α, β) et les entiers positifs n. C'est le même raisonnement que l'on emploie pour prouver que, dans une série convergente à termes positifs ou nuls, on peut intervertir l'ordre des termes; c'est, au fond, le même théorème.

Nous dirons parfois que S est la somme de la série à double entrée.

14. Ceci posé, on va prouver les propositions suivantes :

1° *Les séries à termes positifs ou nuls*

$$\sum_{\beta} a_{\alpha,\beta}$$

sont convergentes.

Nous rappelons, une fois pour toutes, ce qui a été dit au n° 1, qu'un pareil symbole désigne le nombre obtenu en ajoutant les sommes des deux séries

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{\alpha,0} + a_{\alpha,1} + a_{\alpha,2} + \ldots + a_{\alpha,\beta} + \ldots, \\ \qquad\quad a_{\alpha,-1} + a_{\alpha,-2} + \ldots + a_{\alpha,-\beta} + \ldots. \end{cases}$$

2° *Soit*

$$s_\alpha = \sum_{\beta} a_{\alpha,\beta};$$

la série à termes positifs ou nuls

$$(2) \qquad \sum_{\alpha} s_\alpha$$

est convergente et sa somme est égale à S.

Les séries (1) sont convergentes, comme toutes celles dont les termes figurent, chacun une fois au plus, dans la suite $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, et leurs sommes sont, au plus, égales à S. L'emploi des symboles $\sum\limits_{\beta} a_{\alpha,\beta}$, s_α est donc légitime : il est commode de dire que s_α représente la somme de tous les termes du tableau à double entrée qui figurent dans une même ligne horizontale.

Soient p et q deux entiers positifs. Désignons par le symbole $s_{\alpha,q}$ la somme

$$\sum_{\beta=-q}^{\beta=+q} a_{\alpha,\beta} = a_{\alpha,-q} + a_{\alpha,-q+1} + \ldots + a_{\alpha,0} + a_{\alpha,1} + a_{\alpha,2} + \ldots + a_{\alpha,q};$$

il est clair que les nombres $s_{\alpha,q}$, tous inférieurs à S, vont en augmentant quand α reste fixe et que le nombre positif q va en aug-

mentant; quand ce nombre augmente indéfiniment, $s_{\alpha,q}$ a pour limite s_α.

Désignons par le symbole $\sigma_{p,q}$ la somme

$$\sum_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} s_{\alpha,q} = s_{-p,q} + s_{-p+1,q} + \ldots + s_{0,q} + s_{1,q} + s_{2,q} + \ldots + s_{p,q};$$

$\sigma_{p,q}$ peut aussi être regardé comme la somme de tous les nombres $a_{\alpha,\beta}$, dans lesquels le premier indice est, en valeur absolue, inférieur ou égal à p et dont le second indice est, en valeur absolue, inférieur ou égal à q. Ce nombre, positif ou nul, $\sigma_{p,q}$, est donc aussi au plus égal à S, quels que soient p et q. D'ailleurs, $\sigma_{p,q}$ ne peut qu'aller en augmentant quand l'un des indices augmente; lorsque, p restant fixe, q augmente indéfiniment, $\sigma_{p,q}$ tend donc vers une limite au plus égale à S. Cette limite n'est autre chose que la somme

$$\sigma_p = \sum_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} s_\alpha;$$

par conséquent, la somme d'autant de termes que l'on voudra, pris, chacun une fois, parmi les nombres s_α, est au plus égale à S. Il en résulte que la série

$$\sum_\alpha s_\alpha$$

est convergente, et que sa somme est au plus égale à S. Il est aisé de voir qu'elle est précisément égale à S, car elle dépasse tout nombre B inférieur à S. On peut prendre, en effet, dans le tableau, assez de termes pour que leur somme dépasse B, ce qui revient à dire qu'on peut prendre p et q assez grands pour que $\sigma_{p,q}$ dépasse B; mais la limite, pour p infini, de σ_p, ne peut pas être inférieure à $\sigma_{p,q}$; cette limite est donc supérieure à B.

On a donc, en résumé,

$$S = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} s_\alpha = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \left(\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} a_{\alpha,\beta} \right).$$

Il est clair que, au lieu de faire la somme s_α des termes conte-

nus dans chaque ligne horizontale, puis la somme

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} s_\alpha$$

de toutes ces sommes partielles, on aurait pu aussi bien faire la somme de tous les termes contenus dans chaque ligne verticale, puis la somme de toutes les sommes partielles ainsi obtenues. En d'autres termes, on a aussi

$$S = \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} \left(\sum_{=-\infty}^{\alpha=+\infty} a_{\alpha,\beta} \right).$$

On écrit souvent, d'une façon plus abrégée,

$$S = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta},$$

en n'indiquant pas l'ordre dans lequel s'effectuent les sommations.

Réciproquement, si, étant donné le tableau de termes positifs ou nuls $a_{\alpha,\beta}$, les séries $s_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha,\beta}$ sont convergentes, ainsi que la série $\sum_\alpha s_\alpha$, et que l'on désigne encore par S la somme de cette dernière série, on voit de suite que la série à double entrée est convergente, parce que la somme d'autant de termes que l'on veut, pris dans le tableau, ne peut dépasser S; alors la série

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

est forcément convergente. Sa somme est donc égale à S, d'après le théorème qui vient d'être démontré.

15. Plaçons-nous maintenant dans le cas général où les nombres $a_{\alpha,\beta}$ sont quelconques, réels ou imaginaires.

On dira que la série à double entrée, dont les termes sont $a_{\alpha,\beta}$, est *absolument convergente,* si la série à termes positifs ou nuls, dont les termes sont $|a_{\alpha,\beta}|$, est convergente.

Supposons qu'il en soit ainsi ; la série

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

dont les termes sont toujours les nombres $a_{\alpha,\beta}$ rangés dans une suite linéaire, est alors absolument convergente. Désignons-en encore la somme par S, et soit S′ la somme de la série à termes positifs ou nuls

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| + \ldots,$$

On a alors les théorèmes suivants :

1° *Les séries*

$$\sum_\beta a_{\alpha,\beta}$$

sont absolument convergentes.

Cela résulte immédiatement de ce que l'on a démontré, dans le numéro précédent, que les séries

$$\sum_\beta |a_{\alpha,\beta}|$$

sont convergentes.

2° *Soit*

$$s_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha,\beta};$$

la série

$$\sum_\alpha s_\alpha$$

est absolument convergente, et sa somme est égale à S.

Si l'on pose, en effet, p et q désignant toujours des nombres entiers positifs quelconques,

$$s_{\alpha,q} = \sum_{\beta=-q}^{\beta=+q} a_{\alpha,\beta}, \qquad s'_{\alpha,q} = \sum_{\beta=-q}^{\beta=+q} |a_{\alpha,\beta}|,$$

$$\sigma_{p,q} = \sum_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} s_{\alpha,q}, \qquad \sigma'_{p,q} = \sum_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} s'_{\alpha,q},$$

il est clair que l'on aura, pour chaque entier positif p et chaque entier positif q,

$$|s_{\alpha,q}| \leqq s'_{\alpha,q}, \qquad |\sigma_{p,q}| \leqq \sigma'_{p,q};$$

d'ailleurs s_α est la limite, pour q infini, de $s_{\alpha,q}$. Si donc on désigne par s'_α la limite, pour q infini, de $s'_{\alpha,q}$, on aura nécessairement

$$|s_\alpha| \leqq s'_\alpha.$$

Mais, d'après le paragraphe précédent, la série à termes positifs ou nuls

$$\sum_\alpha s'_\alpha$$

est convergente; donc la série

$$\sum_\alpha s_\alpha$$

est absolument convergente. Il reste à prouver que sa somme est égale à S.

Or si, après avoir choisi les entiers positifs p et q, on choisit l'entier positif m, supérieur à tous les entiers positifs qui correspondent à ceux des systèmes (α, β) pour lesquels on a

$$|\alpha| \leqq p, \qquad |\beta| \leqq q,$$

il est clair que la différence

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m - \sigma_{p,q}$$

ne sera autre chose que la somme d'un certain nombre de termes du tableau $a_{\alpha,\beta}$; on aura donc

$$|b_1 + b_2 + \ldots + b_m - \sigma_{p,q}| \leqq |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_m| - \sigma'_{p,q},$$

le second membre étant, de lui-même, positif ou nul. Faisons croître m indéfiniment; cette inégalité ayant toujours lieu, on en déduira

$$|\mathrm{S} - \sigma_{p,q}| \leqq \mathrm{S}' - \sigma'_{p,q};$$

si l'on fait ensuite croître q indéfiniment, $\sigma_{p,q}$ et $\sigma'_{p,q}$ tendront

respectivement vers leurs limites

$$\sigma_p = \sum_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} s_\alpha, \qquad \sigma'_p = \sum_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} s'_\alpha,$$

et l'on aura donc

$$|S - \sigma_p| \leqq S' - \sigma'_p.$$

Mais, lorsque p augmente indéfiniment, σ'_p a pour limite S'; il faut donc que σ_p ait pour limite S. En d'autres termes, on a

$$S = \sum_\alpha s_\alpha = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \left(\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} a_{\alpha,\beta} \right) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}.$$

Il est à peine utile de faire observer que l'on pourrait effectuer les sommations partielles par lignes verticales, au lieu de les effectuer par lignes horizontales, et encore d'une infinité d'autres manières, en raison de ce que la correspondance entre les systèmes (α, β) et les entiers positifs $1, 2, \ldots, n, \ldots$ est arbitraire, ou encore, en raison de ce que les termes de la série

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

peuvent être rangés arbitrairement. Au fond, on est parvenu à une généralisation complète du théorème sur la possibilité de grouper arbitrairement les termes d'une série absolument convergente, la restriction que le nombre de termes contenus dans chaque groupe est fini étant supprimée : il peut y avoir un, plusieurs, une infinité de groupes qui soient eux-mêmes des séries.

16. Il peut être utile de faire observer que si, étant donné le tableau à double entrée $a_{\alpha,\beta}$, on savait que les séries

$$s_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha,\beta}$$

sont absolument convergentes, ainsi que la série

$$\sum_\alpha s_\alpha,$$

on ne devrait pas en conclure que la série à double entrée dont les éléments sont $|a_{\alpha,\beta}|$ est convergente.

17. Comme application du théorème général qui vient d'être démontré, signalons ce fait que, si deux séries

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\alpha + \ldots,$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_\beta + \ldots$$

sont absolument convergentes, il en est de même de la série à double entrée dont le terme général est $u_\alpha v_\beta$, les indices α, β ne pouvant prendre ici que des valeurs positives. En rangeant ensuite les termes de cette série à double entrée en une série linéaire, de façon que les termes, dans lesquels la somme des indices est la même, se suivent, on retrouve la règle ordinaire de la multiplication des séries.

18. Voici une autre application très importante dans la théorie des fonctions elliptiques.

Soit

$$\lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2$$

une forme du second degré dont les coefficients λ, μ, ν soient réels ; supposons, de plus, que cette forme soit *positive,* c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda > 0, \quad \lambda\nu - \mu^2 > 0,$$

en sorte que, quelles que soient les valeurs réelles que l'on mette dans la forme à la place de x, y, on trouve un résultat positif, sauf dans le cas où l'on ferait $x = 0$, $y = 0$.

Nous supposerons qu'on remplace x, y par les divers systèmes de deux nombres entiers positifs, négatifs ou nuls (α, β), en excluant toutefois la combinaison $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et nous considérerons la série à double entrée dont le terme général est

$$\frac{1}{(\lambda\alpha^2 + 2\mu\alpha\beta + \nu\beta^2)^p};$$

cherchons pour quelles valeurs du nombre positif p cette série est convergente.

Pour faire correspondre les systèmes de nombres entiers (α, β) aux nombres $1, 2, \ldots, n, \ldots$, nous adopterons l'un des procédés expliqués au n° **12**, et qui consiste essentiellement à ranger, sur une même ligne horizontale, les systèmes (α, β) pour lesquels

on a

$$(1) \qquad |\alpha| + |\beta| = m,$$

m étant un entier positif. L'équation

$$x + y = m$$

admet $m + 1$ solutions distinctes où x, y sont des nombres entiers, positifs ou nuls : en tenant compte de ce que les systèmes (α, β), $(-\alpha, \beta)$ ne sont distincts que si α est différent de zéro, on en déduit que l'équation (1) admet $4m$ solutions distinctes. Ceci posé, la suite linéaire des quantités (α, β) sera formée en plaçant d'abord les quatre systèmes pour lesquels $|\alpha| + |\beta|$ est égal à un, puis les huit systèmes pour lesquels la même quantité est égale à deux, ... ; de cette façon, le tableau à double entrée est remplacé par une série linéaire à termes positifs ; cette dernière série sera convergente ou divergente en même temps que la série dont on obtient le $m^{\text{ième}}$ terme c_m en réunissant dans un même groupe les $4m$ termes de la série primitive pour lesquels $|\alpha| + |\beta|$ est égal à m. Nous allons évaluer des limites supérieures et inférieures de c_m.

On a

$$\begin{aligned}\lambda\alpha^2 + 2\mu\alpha\beta + \nu\beta^2 &= \frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha + \mu\beta)^2 + \frac{\lambda\nu - \mu^2}{\lambda}\beta^2 \\ &= \frac{1}{\nu}(\nu\beta + \mu\alpha)^2 + \frac{\lambda\nu - \mu^2}{\nu}\alpha^2;\end{aligned}$$

désignons par g le plus petit des nombres positifs

$$\frac{\lambda\nu - \mu^2}{4\lambda}, \qquad \frac{\lambda\nu - \mu^2}{4\nu},$$

et par h le plus grand des nombres λ, $|\mu|$, ν ; on aura, en supposant

$$|\alpha| + |\beta| = m,$$

et en remarquant que l'un des nombres α, β est en valeur absolue au moins égal à $\frac{m}{2}$,

$$hm^2 \geqq \lambda\alpha^2 + 2\mu\alpha\beta + \nu\beta^2 > gm^2;$$

par suite

$$\frac{4m}{g^p m^{2p}} < c_m < \frac{4m}{h^p m^{2p}}.$$

Or la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^r}$$

est convergente quand on a $r > 1$, divergente quand on a $r \leqq 1$; la série dont le terme général est c_m sera donc convergente quand on aura $2p - 1 > 1$, ou $p > 1$, divergente quand on aura $p \leqq 1$. Il en sera de même de la série à double entrée.

On arriverait à la même conclusion en utilisant la représentation géométrique décrite au n° 12 et le mode de correspondance obtenu en tournant successivement autour des cases; on réunirait alors les termes qui se suivent dans un même tour.

Ceci posé, désignons par a, a', b, b' des nombres réels quelconques, tels cependant que $ab' - a'b$ soit différent de zéro, de sorte que, si l'on pose

$$A = a + a'i, \qquad B = b + b'i,$$

A et B soient deux nombres quelconques soumis à cette seule restriction que leur rapport ne soit pas réel, et envisageons la série à double entrée dont le terme général est

$$\frac{1}{(\alpha A + \beta B)^n},$$

n étant un entier positif fixe; α et β peuvent prendre toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles à l'exclusion de la combinaison $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

La valeur absolue de la quantité précédente sera

$$\frac{1}{(\lambda\alpha^2 + 2\mu\alpha\beta + \nu\beta^2)^{\frac{n}{2}}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\lambda = a^2 + a'^2, \qquad \mu = ab + a'b', \qquad \nu = b^2 + b'^2;$$

mais alors la forme

$$\lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2$$

est positive, car la quantité

$$\lambda\nu - \mu^2 = (ab' - a'b)^2$$

est positive, puisque $ab' - a'b$ est supposé différent de zéro; nous sommes donc, pour la série des valeurs absolues des termes de la série à double entrée considérée, dans le cas précédent ; la série des valeurs absolues est convergente si l'on a

$$\frac{n}{2} > 1,$$

divergente dans le cas contraire.

Ainsi, sous les hypothèses précédentes, la série à double entrée dont le terme général est

$$\frac{1}{(\alpha A + \beta B)^n}$$

est absolument convergente quand l'*entier* n est égal ou supérieur à *trois ;* elle n'est pas absolument convergente pour les valeurs de n égales à *un* ou à *deux*.

19. On pourrait encore considérer des séries à entrée p^{uple} dont les termes

$$a_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$$

dépendraient de p indices α, β, ..., λ. On montrerait qu'il est possible d'établir entre les systèmes de p nombres entiers

$$(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

et la suite des entiers positifs 1, 2, ..., n, ... une correspondance univoque et réciproque, fondée par exemple sur le fait que l'équation

$$|\alpha| + |\beta| + \ldots + |\lambda| = m,$$

où m est un entier positif, n'a qu'un nombre limité de solutions; le reste de la théorie de ces séries s'établirait comme pour les séries à double entrée. Le lecteur pourra, par exemple, s'exercer à généraliser la première partie du théorème établi dans le paragraphe précédent, en considérant à la place d'une forme quadratique positive à deux variables une forme quadratique positive à p variables.

III. — Produits infinis à double entrée.

20. On peut considérer des produits infinis à double entrée comme des séries à double entrée.

Reprenons les notations antérieures et supposons les termes $a_{\alpha,\beta}$, où α, β peuvent prendre toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives, rangés suivant une suite linéaire b_1, b_2, ..., b_n, ...

Le produit infini à double entrée

$$\prod_{\alpha,\beta}(1+a_{\alpha,\beta})$$

sera dit *absolument convergent* si la série à double entrée dont le terme général est $a_{\alpha,\beta}$ est absolument convergente ; la *valeur* de ce produit infini est, par définition, celle du produit absolument convergent

$$P=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+b_n).$$

Nous allons prouver que cette valeur peut être obtenue par des règles analogues à celles qui concèrnent les séries à double entrée.

21. Supposons d'abord que toutes les quantités $a_{\alpha,\beta}$ soient positives ou nulles.

Le produit d'autant de facteurs que l'on veut, pris parmi les quantités $1+a_{\alpha,\beta}$ est au plus égal à P. On peut prendre assez de facteurs pour que leur produit dépasse tel nombre que l'on veut inférieur à P.

Soient p, q deux entiers positifs : posons

$$\begin{aligned}1+l_{\alpha,q}=\prod_{\beta=-q}^{\beta=+q}(1+a_{\alpha,\beta})= {} & (1+a_{\alpha,-q})(1+a_{\alpha,-q+1})\ldots(1+a_{\alpha,0})\\ & \times(1+a_{\alpha,1})\;(1+a_{\alpha,2})\quad\ldots(1+a_{\alpha,q}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+\lambda_{p,q}=\prod_{\alpha=-p}^{\alpha=+p}(1+l_{\alpha,q})= {} & (1+l_{-p,q})(1+l_{-p+1,q})\ldots(1+l_{0,q})\\ & \times(1+l_{1,q})\;(1+l_{2,q})\quad\ldots(1+l_{p,q});\end{aligned}$$

$1+\lambda_{p,q}$ peut aussi être considéré comme le produit de tous les facteurs $1+a_{\alpha,\beta}$ pour lesquels on a

$$|\alpha| \leq p, \quad |\beta| \leq q;$$

$l_{\alpha,q}$, $\lambda_{p,q}$ sont positifs ou nuls et l'on a

$$1+l_{\alpha,q} \leq \mathrm{P}, \quad 1+\lambda_{p,q} \leq \mathrm{P}.$$

Quand q augmente indéfiniment, $1+l_{\alpha,q}$, qui augmente avec q, tend vers une limite $1+l_\alpha$, et l'on a

$$1+l_\alpha = \prod_\beta (1+a_{\alpha,\beta}),$$

où le second membre représente, comme il a été expliqué (n° 10), le produit des valeurs des deux produits infinis dont les facteurs s'obtiennent en faisant varier, dans $a_{\alpha,\beta}$, β de 0 à $+\infty$ et de -1 à $-\infty$.

D'ailleurs, si dans l'inégalité

$$1+\lambda_{p,q} \leq \mathrm{P}$$

on fait croître q indéfiniment, on voit, en se reportant à la définition de $1+\lambda_{p,q}$ que les $2p+1$ facteurs qui le composent tendent respectivement vers

$$\begin{array}{llll} 1+l_{-p}, & 1+l_{-p+1}, & \ldots, & 1+l_0, \\ 1+l_1, & 1+l_2, & \ldots, & 1+l_p, \end{array}$$

en sorte que l'on a

$$\prod_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} (1+l_\alpha) \leq \mathrm{P}.$$

Comme les nombres l_α sont positifs ou nuls, on en conclut que le produit infini

$$\prod_\alpha (1+l_\alpha)$$

est convergent et a une valeur égale ou inférieure à P. Mais cette valeur ne peut être que supérieure à $1+\lambda_{p,q}$; or, si l'on se donne un nombre positif $\mathrm{B} < \mathrm{P}$ quelconque, on peut, d'une part,

prendre n assez grand pour que le produit

$$(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n)$$

dépasse B et, d'autre part, prendre p, q assez grands pour que tous les facteurs qui précèdent entrent dans la composition de $1+\lambda_{p,q}$ qui sera dès lors supérieur à B. Donc, la valeur du produit infini, étant supérieure à B, est nécessairement égale à P.

Remarquons en passant que la convergence de la série à termes positifs ou nuls

$$\sum_\alpha l_\alpha$$

résulte de la précédente analyse.

22. Supposons maintenant que les quantités $a_{\alpha,\beta}$ étant quelconques, réelles ou imaginaires, la série à double entrée dont le terme général est $|a_{\alpha,\beta}|$ soit convergente. Conservons les mêmes significations aux quantités $l_{\alpha,q}$, $\lambda_{p,q}$ et posons

$$1+l'_{\alpha,q}=\prod_{\beta=-q}^{\beta=+q}(1+|a_{\alpha,\beta}|),$$

$$1+\lambda'_{p,q}=\prod_{\alpha=-p}^{\alpha=+p}(1+l'_{\alpha,q}).$$

Le produit infini

$$\prod_\beta(1+a_{\alpha,\beta})$$

est absolument convergent à cause de la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_\beta|a_{\alpha,\beta}|.$$

La valeur de ce produit infini est la limite $1+l_\alpha$ de $1+l_{\alpha,q}$ pour q infini, et l'on peut poser encore

$$1+l_\alpha=\prod_\beta(1+a_{\alpha,\beta}).$$

Si l'on fait de même

$$1 + l'_\alpha = \prod_\beta (1 + |a_{\alpha,\beta}|),$$

on aura évidemment

$$|l_\alpha| \leqq l'_\alpha.$$

Mais, d'après le numéro précédent, la série

$$\sum_\alpha l'_\alpha$$

est convergente; il en est donc de même de la série

$$\sum_\alpha |l_\alpha|$$

et, par suite, le produit infini

$$\prod_\alpha (1 + l_\alpha)$$

est absolument convergent. Nous allons prouver que sa valeur est égal à P.

Choisissons, à cet effet, un entier n assez grand pour que tous les facteurs $1 + a_{\alpha,\beta}$ tels que l'on ait

$$|\alpha| \leqq p, \qquad |\beta| \leqq q$$

figurent parmi les facteurs

$$1 + b_1, \quad 1 + b_2, \quad \ldots, \quad 1 + b_n;$$

désignons par P_n le produit de ces facteurs et par P'_n le produit des facteurs

$$1 + |b_1|, \quad 1 + |b_2|, \quad \ldots, \quad 1 + |b_n|.$$

D'après un raisonnement déjà employé (n° 15), nous aurons alors

$$|P_n - (1 + \lambda_{p,q})| \leqq P'_n - (1 + \lambda'_{p,q}),$$

d'où, en faisant croître n indéfiniment et en désignant par P' la limite de P'_n pour n infini,

$$|P - (1 + \lambda_{p,q})| \leqq P' - (1 + \lambda'_{p,q}),$$

puis, en faisant croître q indéfiniment,

$$\left| \mathrm{P} - \prod_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} (1 + l_\alpha) \right| \leqq \mathrm{P}' - \prod_{\alpha=-p}^{\alpha=+p} (1 + l'_\alpha).$$

Mais, lorsque p augmente indéfiniment, la limite du second membre est zéro; on a donc finalement

$$\mathrm{P} = \prod_{\alpha} (1 + l_\alpha) = \prod_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \left[\prod_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} (1 + a_{\alpha,\beta}) \right].$$

Pour la même raison

$$\mathrm{P} = \prod_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} \left[\prod_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} (1 + a_{\alpha,\beta}) \right],$$

en sorte qu'on peut grouper, soit d'abord par lignes horizontales et réunir en un même produit infini les produits partiels ainsi obtenus, soit d'abord par lignes verticales et réunir en un même produit infini les produits partiels ainsi obtenus. On pourrait encore effectuer ces groupements partiels d'une infinité d'autres manières.

CHAPITRE II.

DES SÉRIES ET PRODUITS INFINIS DONT LES TERMES DÉPENDENT D'UNE VARIABLE.

I. — Définitions et premières propositions.

23. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des séries ou des produits infinis dont les termes ou les facteurs dépendent uniquement de leur rang ; nous allons considérer maintenant des séries ou des produits infinis dans lesquels ces termes ou ces facteurs dépendent d'une variable x réelle ou imaginaire.

Considérons tout d'abord une telle série

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et supposons qu'elle soit convergente pour chaque valeur de x appartenant à un certain ensemble défini comme on le voudra. Alors la somme de cette série définit une fonction [1] dont la valeur est déterminée pour chaque valeur de x appartenant à cet ensemble.

Désignons par S_n la somme des n premiers termes et par R_n le reste de la série limitée au terme u_n, c'est-à-dire la somme de la série convergente

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots;$$

la série proposée est dite *uniformément* convergente pour les

[1] Nous entendrons le mot *fonction* sans épithète, dans ce sens : la variable y est fonction de la variable indépendante x, si la valeur de y est déterminée quand on se donne la valeur de x. Cette signification du mot *fonction* est très différente de celle qu'il prend dans l'expression *fonction analytique*.

valeurs de x appartenant à l'ensemble considéré ([1]), si, à chaque nombre positif ε, on peut faire correspondre un entier positif r tel que, sous la seule condition

$$n > r,$$

l'on ait

$$|S - S_n| = |R_n| < \varepsilon,$$

quelle que soit la valeur de x appartenant à l'ensemble considéré.

De même, si, pour toutes les valeurs de x appartenant à un ensemble, le produit

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n)$$

est absolument convergent, on dira qu'il est en outre *uniformément convergent* pour toutes ces valeurs de x, si, à chaque nombre positif ε, on peut faire correspondre un entier r tel que, sous la seule condition

$$n > r,$$

l'on ait, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'ensemble considéré

$$|P - P_n| < \varepsilon,$$

en désignant par P la valeur du produit infini et par P_n le produit de ses n premiers facteurs.

D'après cette définition, on voit que le précédent produit, supposé absolument convergent, est uniformément convergent si la série équivalente à ce produit

$$1 + u_1 + u_2 P_1 + u_3 P_2 + \ldots + u_n P_{n-1} + \ldots$$

est uniformément convergente.

24. *S'il existe une suite de nombres positifs ou nuls*

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_n, \quad \ldots$$

tels que la série

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_n + \ldots$$

soit convergente, et que l'on ait, quel que soit n, et quelle que

---

([1]) Plus brièvement, uniformément convergente dans l'ensemble considéré.

soit la valeur de x appartenant à l'ensemble considéré,

$$|u_n| \leqq g_n,$$

la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de x appartenant à l'ensemble considéré et il en est de même du produit infini (¹)

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n).$$

Que la série soit absolument convergente, cela est évident, puisque chacun de ses termes est moindre en valeur absolue que le terme correspondant d'une série convergente à termes positifs. D'un autre côté, si l'on se donne un nombre positif ε, on pourra déterminer un nombre positif r tel que l'on ait

$$g_{r+1} + g_{r+2} + g_{r+3} + \ldots < \varepsilon;$$

on aura donc, quel que soit p, sous la seule condition $n \geqq r$,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

et, par suite,

$$|R_n| < \varepsilon,$$

et cela quelle que soit la valeur de x appartenant à l'ensemble considéré.

Pour ces mêmes valeurs, le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n)$$

est absolument et uniformément convergent, comme on s'en convainc de suite en comparant la série équivalente à ce produit à la série équivalente au produit convergent

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + g_n).$$

(¹) WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 70.

Mais il importe de remarquer plus généralement que *si, pour un ensemble de valeurs de x, la série à termes positifs*

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

est uniformément convergente, et si sa somme reste inférieure à un nombre fixe A, *le produit infini*

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+u_n)$$

sera absolument et uniformément convergent pour cet ensemble de valeurs de x, ainsi que la série équivalente

$$1+u_1+u_2 P_1+\ldots+u_n P_{n-1}+\ldots.$$

En effet, les quantités $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, P$ sont toutes inférieures en valeur absolue à

$$B=e^A:$$

or, à chaque nombre positif ε, on peut faire correspondre un entier r tel que, sous la condition $n>r$, on ait

$$|u_n|+|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots<\frac{\varepsilon}{B};$$

on aura donc, sous les mêmes conditions,

$$|u_n P_{n-1}|+|u_{n+1}P_n|+|u_{n+2}P_{n+1}|+\ldots<\varepsilon,$$

et cela quelle que soit la valeur de x appartenant à l'ensemble considéré.

25. Considérons un ensemble (E) de valeurs de x jouissant de la propriété suivante : Quelle que soit la valeur x_0 appartenant à l'ensemble considéré et quelque petit que soit le nombre positif ε, il existe des valeurs de x appartenant à l'ensemble (E) et telles que l'on ait

$$|x-x_0|<\varepsilon.$$

L'ensemble (E) pourra être constitué, par exemple, par l'ensemble des valeurs de x figurées par les points d'un arc de courbe, ou par les points d'une aire limitée par un contour simple.

Si $f(x)$ est une fonction de x définie pour toutes ces valeurs de x, on dira qu'elle est *continue* pour l'ensemble (E) si, à chaque nombre positif α, si petit qu'il soit, l'on peut faire correspondre un nombre positif β tel que l'on ait

$$|f(x) - f(x')| < \alpha$$

pour toutes les valeurs x, x' de l'ensemble (E) telles que l'on ait

$$|x - x'| < \beta.$$

26. Ces définitions rappelées, supposons que, pour l'ensemble (E), les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de la variable x soient continues et que la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

soit uniformément convergente. La somme de cette série sera alors une fonction $f(x)$ définie et continue pour cet ensemble.

Soit, en effet, $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de cette série, $R_n(x)$ le reste ; on aura

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Puisque la série est uniformément convergente, on peut, à chaque nombre positif ε, faire correspondre un entier n tel que l'on ait

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour toutes les valeurs de x appartenant à (E) ; n étant fixé, on peut, à cause de la continuité de $S_n(x)$ qui est manifeste dans l'ensemble (E), faire correspondre au nombre ε un nombre positif η tel que, pour toutes les valeurs x, x' appartenant à (E) et vérifiant la condition $|x - x'| < \eta$, on ait

$$|S_n(x) - S_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura donc, pour ces mêmes valeurs de x,

$$|f(x) - f(x')| = |[S_n(x) - S_n(x')] + R_n(x) - R_n(x')| < \varepsilon.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si, en outre, la série est supposée absolument convergente, on verra de même que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+u_n)$$

définit une fonction continue de x pour l'ensemble (E).

27. Soient $\varphi(t)$, $\psi(t)$ deux fonctions réelles de la variable réelle t, admettant dans l'intervalle (t_0, t_1) des dérivées finies et continues $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Lorsque t variera de t_0 à t_1, le point dont l'affixe est

$$x = \varphi(t) + i\psi(t),$$

décrira un arc de courbe (C). Considérons l'ensemble (E) des valeurs de x figurées par des points de (C) et soit, en général, $F(x)$ une fonction continue de x pour l'ensemble (E) ; en remplaçant, dans cette fonction, x par $\varphi(t) + i\psi(t)$, elle prendra la forme

$$\Phi(t) + i\Psi(t),$$

$\Phi(t)$, $\Psi(t)$ étant des fonctions réelles et continues de t dans l'intervalle (t_0, t_1). Ceci posé, nous rappelons que l'on appelle *intégrale* de $F(x)$ prise le long de la courbe (C) et qu'on représente par le symbole

$$\int_C F(x)\,dx$$

l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} [\Phi(t) + i\Psi(t)]\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [\Phi(t)\varphi'(t) - \Psi(t)\psi'(t)]\,dt + i\int_{t_0}^{t_1} [\Phi(t)\psi'(t) + \Psi(t)\varphi'(t)]\,dt.$$

L'existence des deux intégrales qui figurent dans le second membre, intégrales où tout est réel, est certaine, en raison de la continuité.

28. Soit maintenant une série

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

uniformément convergente pour l'ensemble (E) des points de la courbe (C), et dont les termes soient des fonctions continues de x pour ce même ensemble. Désignons par $F(x)$ la somme de cette série, qui est (n° 26) une fonction continue de x.

Nous allons prouver que la série

$$(2) \qquad \int_C u_1\,dx + \int_C u_2\,dx + \ldots + \int_C u_n\,dx + \ldots,$$

où toutes les intégrales sont prises le long de (C), est convergente et a pour somme

$$\int_C F(x)\,dx.$$

Si, en effet, on désigne par $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série (1), et par $R_n(x)$ le reste correspondant, $S_n(x)$ et $R_n(x)$ seront des fonctions continues de x, et l'on aura

$$F(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

$$\int_C F(x)\,dx = \int_C S_n(x)\,dx + \int_C R_n(x)\,dx,$$

$$\int_C S_n(x)\,dx = \int_C u_1\,dx + \int_C u_2\,dx + \ldots + \int_C u_n\,dx,$$

toutes les intégrales étant prises le long de l'arc (C). Ceci posé, à chaque nombre positif ε correspond un nombre entier positif r tel que l'on ait

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

sous la seule condition $n \geqq r$, et cela, quelle que soit la valeur de x appartenant à l'ensemble considéré. On aura donc, en désignant par σ la longueur de l'arc,

$$\left|\int_C R_n(x)\,dx\right| < \varepsilon\sigma.$$

Ainsi, la différence entre

$$\int_C F(x)\,dx$$

et la somme des n premiers termes de la série (2) peut être supposée moindre, en valeur absolue, que tel nombre positif que l'on

voudra, pourvu que n soit assez grand. Cela prouve, à la fois, que la série (2) est convergente et que sa somme est égale à

$$\int_{C} F(x)\,dx.$$

Ce théorème s'appliquera, en particulier, lorsqu'on saura que la série (1) est uniformément convergente pour l'ensemble des valeurs de x, représentées par des points appartenant à une aire (A) limitée par un contour simple ([1]), et que ses termes sont, pour les mêmes valeurs de x, des fonctions continues, la courbe (C) faisant tout entière partie de l'aire A.

II. — Séries entières en x.

29. Considérons maintenant les séries de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont des nombres fixes donnés.

Nous donnerons à ces séries, qui jouent en Analyse un rôle très important, le nom de *séries entières en x*, et nous emploierons le symbole

$$\mathfrak{P}(x)$$

pour représenter la somme d'une telle série supposée convergente : la lettre $\mathfrak{P}$ peut d'ailleurs être affectée d'indices, pour permettre de distinguer des séries particulières. Enfin, quand aucune ambiguïté ne sera à craindre, nous pourrons employer le symbole $\mathfrak{P}(x)$ pour représenter, non la somme de la série, mais la série elle-même, regardée seulement comme la loi de la succession de ses termes; ainsi, nous ne nous interdirons pas de dire d'une série déterminée qu'elle est divergente pour une certaine valeur de x.

On doit à Abel deux théorèmes sur les séries de cette nature, séries qui jouent, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, un rôle prépondérant.

([1]) A moins que l'hypothèse contraire ne soit expressément énoncée, nous regarderons toujours comme faisant partie d'une aire limitée par un contour les points intérieurs et les points du contour.

30. Voici le premier de ces théorèmes :

Si, pour $x = b$, la valeur absolue de chaque terme $a_n b^n$ de la série

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est moindre qu'un nombre positif fixe A, *la série $\mathfrak{P}(x)$ est absolument convergente pour toutes les valeurs de x dont la valeur absolue est moindre que celle de b.*

Soit, en effet, b' un nombre positif moindre que $|b|$. La série à termes positifs

$$(1) \qquad \mathrm{A} + \mathrm{A}\frac{b'}{|b|} + \mathrm{A}\frac{b'^2}{|b|^2} + \ldots + \mathrm{A}\frac{b'^n}{|b|^n} + \ldots$$

est convergente. Or les valeurs absolues des termes de la série $\mathfrak{P}(x)$ sont, pour l'ensemble des valeurs de x qui vérifient la condition

$$|x| \leqq b',$$

moindres que les termes correspondants de la série (1); car les suppositions

$$|a_n b^n| \leqq \mathrm{A}, \qquad |x| \leqq b'$$

entraînent les conclusions

$$|a_n| \leqq \frac{\mathrm{A}}{|b|^n}, \qquad |a_n x^n| \leqq \frac{\mathrm{A}\,b'^n}{|b|^n}.$$

On pourra donc appliquer les propositions du n° 24, et l'on voit que la série $\mathfrak{P}(x)$ est absolument et *uniformément* convergente, pourvu que l'on ait

$$|x| \leqq b',$$

c'est-à-dire pour tous les points situés *à l'intérieur et sur la circonférence* d'un cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon moindre que $|b|$.

31. Si la série $\mathfrak{P}(x)$ du numéro précédent est convergente pour $x = b$, comme la valeur absolue de $a_n b^n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, il est clair qu'il existe un nombre positif A tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de n,

$$\mathrm{A} \geqq |a_n b^n| :$$

donc la série sera absolument convergente pour tous les points situés *à l'intérieur* du cercle décrit du point O comme centre et passant par le point b; elle sera *uniformément* convergente à l'intérieur et sur la circonférence de tout cercle concentrique au précédent et de rayon moindre.

Différentes circonstances peuvent d'ailleurs se présenter :

Ou bien la série $\mathfrak{P}(x)$ considérée est convergente, quel que soit x : telle est la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

alors $\mathfrak{P}(x)$ est uniformément convergente dans tout cercle décrit de l'origine comme centre, et même dans toute aire limitée par un contour simple. Cette série $\mathfrak{P}(x)$ représente alors ce que l'on appelle une *fonction transcendante entière.*

Ou bien la série $\mathfrak{P}(x)$ est convergente pour certaines valeurs de x, sans l'être pour toutes. L'ensemble des rayons des cercles décrits du point O comme centre, et qui passent par des points pour lesquels la série est convergente, admet alors une *limite supérieure* R. Le cercle de rayon R décrit du point O comme centre est le *cercle de convergence* de la série $\mathfrak{P}(x)$. La série est convergente en tout point intérieur au cercle R; elle peut être convergente ou divergente en quelques points ou en tous les points de la circonférence; elle est divergente pour tout point extérieur. Elle est uniformément et absolument convergente pour l'ensemble des points situés à l'intérieur ou sur la circonférence d'un cercle concentrique au cercle de convergence et de rayon moindre. Là où elle est uniformément convergente, elle représente une fonction continue. Signalons, comme exemples, les séries

$$1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n, \qquad 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^2},$$

qui admettent toutes trois pour cercle de convergence le cercle de rayon un, décrit du point O comme centre. La première est divergente pour tout point de la circonférence de ce cercle, comme on le voit en posant $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$, et en remarquant que les deux quantités $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ ne peuvent avoir simultanément

zéro pour limite quand n grandit indéfiniment. La seconde est convergente, mais non absolument, pour tous les points de la circonférence [1], sauf pour $x = 1$. La troisième est convergente en tous les points de la circonférence.

Observons qu'une série entière en x pourrait n'être convergente pour aucune valeur de x autre que zéro : telle est la série

$$x + 1.2x^2 + 1.2.3x^3 + \ldots + 1.2.3\ldots nx^n + \ldots;$$

on dit alors que le cercle de convergence est de rayon nul.

---

(1) Cela résulte de la première des deux propositions suivantes, signalées par M. Darboux dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. IV), et sur lesquelles on peut consulter l'*Introduction à la théorie des fonctions* de M. Jules Tannery, p. 96, n° 71).

Si la série à termes réels (qui peut être divergente)

$$\text{(I)} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

est telle que la somme de ses n premiers termes reste, en valeur absolue, quel que soit n, inférieure à un nombre fixe, et si les nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ satisfont aux conditions

$$\text{(II)} \qquad \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \ldots,$$

$$\text{(III)} \qquad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0,$$

la série

$$\text{(IV)} \qquad a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n + \ldots$$

est convergente.

Cette dernière série (IV) est encore convergente si la série (I) est convergente et si les nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ satisfont seulement aux conditions (II).

On prendra, dans le cas actuel, pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ et, pour la série (I), l'une ou l'autre des séries (divergentes)

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi + \ldots,$$
$$0 + \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi + \ldots,$$

dans lesquelles les sommes des $(n+1)$ premiers termes

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

restent finies quel que soit n, si φ n'est pas un multiple de 2π.

Enfin, nous nous contenterons d'énoncer le théorème suivant, dont la démonstration est immédiate.

Si le rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ a, pour n infini, une limite égale à R, le cercle de convergence de la série

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est de rayon R.

32. Supposons encore que la série entière en x,

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

soit convergente pour $x = b$. On peut affirmer qu'elle est uniformément convergente pour l'ensemble des valeurs de x appartenant au segment de droite, qui va du point o au point b. C'est en cela que consiste le second des théorèmes d'Abel, dont nous avons parlé.

Observons d'abord que l'on peut ramener le cas général au cas où b est égal à un; il suffit, pour cela, de faire le changement de variable

$$x = \xi b.$$

Quand le point x décrit le segment qui va du point o au point b, le point ξ décrit, en effet, le segment qui va du point o au point 1.

Le second théorème d'Abel consiste alors dans l'énoncé suivant :

Si la série

$$(2) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

est convergente, la série entière en x,

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

est uniformément convergente pour l'ensemble des valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (o, 1), *les limites de cet intervalle n'étant pas exclues.*

On sait déjà, il est vrai, que la convergence est uniforme dans l'intervalle (o, α), α étant un nombre positif plus petit que 1,

mais les raisonnements qui précèdent ne permettent pas d'atteindre la limite 1.

Cherchons donc à prouver directement que, à tout nombre positif arbitrairement donné ε, correspond un entier r, tel que, sous les conditions

$$n > r, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

le reste $R_n(x)$ de la série $\mathfrak{P}(x)$, limitée au terme de rang n, soit, en valeur absolue, plus petit que ε.

Comme la série (2) est convergente, au nombre ε correspond un entier r tel que, pour $n > r$,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots|,$$

c'est-à-dire $|R_n(1)|$ soit moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, si l'on pose

$$a_{n+1} = \sigma_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} = \sigma_p,$$

et si l'on observe que σ_p est la différence entre

$$R_n(1) = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

et

$$R_{n+p}(1) = a_{n+p+1} + a_{n+p+2} + \ldots,$$

on voit que l'on aura, quel que soit p,

$$|\sigma_p| < \varepsilon.$$

D'ailleurs les égalités précédentes donnent

$$a_{n+p} = \sigma_p - \sigma_{p-1};$$

donc la somme des p premiers termes de $R_n(x)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}\sigma_1 x^{n+1} &+ (\sigma_2 - \sigma_1) x^{n+2} + \ldots + (\sigma_p - \sigma_{p-1}) x^{n+p} \\ &= x^{n+1}(1 - x)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \ldots + \sigma_{p-1} x^{p-2}) + \sigma_p x^{n+p}.\end{aligned}$$

Si la valeur absolue de x est plus petite que 1, le terme $\sigma_p x^{n+p}$ tend vers zéro quand p augmente indéfiniment; on peut donc écrire

$$R_n(x) = x^{n+1}(1 - x)(\sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \ldots),$$

et, puisque les valeurs absolues des quantités σ_p sont toutes moindres que ε, on aura, en supposant que x soit positif et plus petit que 1,

$$|R_n(x)| < x^{n+1}(1-x)(\varepsilon + \varepsilon x + \varepsilon x^2 + \ldots):$$

or la série qui figure entre parenthèses dans le second membre, a pour somme $\frac{\varepsilon}{1-x}$; on a donc, sous les conditions

$$n > r, \qquad 0 \leqq x < 1,$$
$$|R_n(x)| < \varepsilon x^{n+1} < \varepsilon.$$

En réunissant à cette inégalité celle que l'on a obtenue plus haut, sous les conditions

$$n > r, \qquad x = 1,$$

savoir

$$|R_n(1)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

on a bien démontré l'uniformité de la convergence dans tout l'intervalle (0, 1), les limites n'étant pas exclues.

A cause de cette uniformité, la somme de la série est une fonction continue dans tout l'intervalle considéré, sans en exclure la limite 1; si donc x tend vers 1 par des valeurs positives inférieures à 1, la somme de la série a pour limite la valeur de la somme de la série pour $x = 1$, c'est-à-dire

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (^1).$$

Par exemple, l'égalité

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

---

(1) L'expression précédente du reste permet d'aller un peu plus loin, ainsi que M. Stolz l'a fait observer (*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, t. II). En ne supposant plus x réel, mais en supposant toujours sa valeur absolue $|x|$ moindre que 1, on a, en effet,

$$|R_n(x)| < |x|^{n+1}|1-x|(\varepsilon + \varepsilon|x| + \varepsilon|x|^2 + \ldots) < \varepsilon\frac{|1-x|}{1-|x|},$$

et il est aisé de montrer que le facteur qui multiplie ε reste moindre qu'un nombre fixe, pourvu que l'angle aigu des deux directions qui vont du point 1 aux points x et 0 reste moindre qu'un angle aigu fixe.

établie pour les valeurs réelles de x moindres que 1, montre que l'on a

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots.$$

En effet, la série du second membre est convergente, donc, en vertu du théorème qui vient d'être démontré, lorsque le nombre réel x tend vers 1 par des valeurs moindres que 1, la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

tend vers

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots;$$

or, dans les mêmes conditions, $\log(1+x)$ tend vers $\log 2$; on a donc bien

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots.$$

33. Dans les deux paragraphes qui précèdent nous avons supposé la série entière en x

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

convergente pour $x = b$: lorsqu'on sait que la série est, pour cette même valeur, *absolument* convergente, les termes de la série $\mathfrak{P}(x)$ étant, pour l'ensemble des valeurs de x qui vérifient la condition $|x| \leqq |b|$, moindres en valeur absolue que les termes, tous positifs, de la série convergente

$$|a_0| + |a_1 b| + \ldots + |a_n b^n| + \ldots,$$

ou égaux à ces termes, on peut appliquer la première proposition du n° 24, et l'on voit de suite, sans passer par le second théorème d'Abel, que, pour l'ensemble de ces valeurs, c'est-à-dire à l'intérieur et sur la circonférence du cercle de rayon $|b|$ décrit du point o comme centre, la série est uniformément et absolument convergente et représente une fonction continue. Ce cercle peut d'ailleurs être le cercle de convergence ou lui être intérieur.

34. Le premier théorème d'Abel (n° 30) nous renseigne sur la convergence d'une série entière d'après les valeurs absolues des

coefficients de cette série. Inversement, la proposition qui suit et qui est due à Cauchy nous donne un renseignement essentiel sur les valeurs absolues des coefficients d'une série entière que l'on sait être absolument convergente sur la circonférence d'un cercle.

La série $\mathfrak{P}(x)$ étant absolument convergente pour $x = b$, supposons que l'on ait, en désignant par A un nombre positif,

$$|\mathfrak{P}(x)| \leqq \mathrm{A}$$

pour tous les points de la circonférence du cercle décrit du point o comme centre avec le rayon $r = |b|$; on aura alors

$$|a_n| \leqq \mathrm{A}\, r^{-n}.$$

Partons, en effet, de l'égalité

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x)x^{-n-1} = a_0 x^{-n-1} + a_1 x^{-n} + \ldots + a_n x^{-1}\\ + a_{n+1} + a_{n+2}x + \ldots;\end{aligned}$$

il est clair (n° 24) que le second membre sera une série uniformément convergente pour l'ensemble des valeurs de x représentées par des points situés sur la circonférence du cercle de rayon $r = |b|$: on pourra donc intégrer cette série, terme par terme, le long de cette circonférence, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} \mathfrak{P}(x)x^{-n-1}\,dx = a_0\int_{\mathrm{C}} x^{-n-1}\,dx + a_1\int_{\mathrm{C}} x^{-n}\,dx + \ldots\\ + a_n\int_{\mathrm{C}} x^{-1}\,dx + a_{n+1}\int_{\mathrm{C}} dx + a_{n+2}\int_{\mathrm{C}} x\,dx + \ldots,\end{aligned}$$

toutes les intégrales étant prises le long de la circonférence. Pour évaluer ces intégrales, on posera (n° 27)

$$x = r(\cos t + i\sin t),$$

d'où

$$dx = r\left[\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right]dt,$$

et l'on aura, en général, en désignant par p un entier positif ou négatif,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} x^p\,dx = r^{p+1}\int_0^{2\pi}\cos\left[(p+1)t + \frac{\pi}{2}\right]dt\\ + ir^{p+1}\int_0^{2\pi}\sin\left[(p+1)t + \frac{\pi}{2}\right]dt.\end{aligned}$$

Si p est différent de -1, les intégrales du second membre sont nulles; si $p=-1$, le second membre se réduit à $2i\pi$; on a donc [1]

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\mathfrak{P}(x)\,dx}{x^{n+1}};$$

d'où

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{\mathfrak{P}(x)}{x^{n+1}}\,dx\right|;$$

mais la valeur absolue de $\mathfrak{P}(x)x^{-n-1}$ est au plus égale à $\mathrm{A}r^{-n-1}$ et la longueur du chemin d'intégration est $2\pi r$; le second membre de cette égalité est donc au plus égal à $\mathrm{A}r^{-n}$, ce qu'il fallait démontrer.

35. Voici une conséquence importante de cette formule.

Si la série entière en x

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

est convergente quel que soit x, et qu'elle ne se réduise pas à la constante a_0, sa somme ne peut rester moindre en valeur absolue qu'un nombre positif A pour toutes les valeurs de x.

En effet, l'inégalité

$$|a_n| \leqq \mathrm{A}r^{-n},$$

si l'on pouvait y faire grandir r indéfiniment, montrerait que $|a_n|$ peut être pris plus petit que tel nombre positif que l'on voudra; on aurait donc

$$|a_n| = 0$$

pour toutes les valeurs de n à partir de 1.

On voit que, si l'on se donne les nombres positifs A, B, il y a au moins une valeur de x, telle que l'on ait

$$|x| > \mathrm{B}, \quad |\mathfrak{P}(x)| > \mathrm{A}.$$

Cette propriété rapproche les fonctions transcendantes entières des polynomes entiers en x. Il y a toutefois une différence essentielle :

---

[1] C'est aussi bien, comme l'on sait, une conséquence de la formule de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

pour les fonctions transcendantes entières on peut affirmer seulement l'existence d'une valeur de x satisfaisant aux conditions précédentes; pour les polynomes, au contraire, si l'on se donne A, on peut trouver un nombre B correspondant tel que *toutes* les valeurs de x qui vérifient la première inégalité vérifient aussi la seconde.

36. Soit

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série entière en x, convergente pour les valeurs de x telles que l'on ait

$$|x| < \mathrm{R};$$

$\mathfrak{P}(x)$ est alors une fonction continue dans tout cercle de rayon R′ moindre que R; on a d'ailleurs

$$\mathfrak{P}(0) = a_0;$$

si donc a_0 n'est pas nul, on peut fixer un nombre δ, inférieur ou égal à R′, tel que l'on ait

$$|\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(0)| < |a_0|$$

pourvu que l'on ait

$$|x| \leqq \delta.$$

Pour les valeurs de x qui vérifient cette condition, $\mathfrak{P}(x)$ ne sera jamais nulle.

Si les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ sont nuls sans que a_p le soit, on aura

$$\mathfrak{P}(x) = x^p(a_p + a_{p+1}x + a_{p+2}x^2 + \ldots),$$

et l'on voit qu'il existera un nombre positif δ tel que, parmi les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

$$|x| \leqq \delta,$$

zéro soit la seule pour laquelle $\mathfrak{P}(x)$ s'annule. Par conséquent, pour que $\mathfrak{P}(x)$ s'annule en une infinité de points distincts dont l'ensemble admette zéro pour limite [1], par exemple pour tous

---

[1] On dit que des points appartenant à un ensemble infini admettent ξ pour limite si, quelque petit que soit ε, il existe dans le cercle décrit du point ξ comme centre avec un rayon égal à ε une infinité de points appartenant à l'ensemble.

les points d'un arc de courbe qui aboutit au point o, il faut que tous les coefficients a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ..., soient nuls.

Par conséquent encore, pour tous les points d'un pareil ensemble, deux séries

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots$$

ne peuvent avoir les mêmes valeurs sans être identiques, c'est-à-dire sans que l'on ait $a_n = b_n$ pour toutes les valeurs de n. Il suffit, pour s'en convaincre, d'appliquer la remarque précédente à la série

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \ldots.$$

III. — Séries de séries entières.

37. Soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$$

une série dont les termes sont des séries entières en x, en sorte que l'on ait, en désignant par $a_{\alpha,\beta}$ des constantes,

$$u_\alpha = a_{\alpha,0} + a_{\alpha,1}x + \ldots + a_{\alpha,\beta}x^\beta + \ldots \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si le rayon du cercle de convergence de chacune des séries u_α est supérieur ou égal à un nombre positif fixe A; si en outre la série $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$ est uniformément convergente pour l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x| < A,$$

la somme de la série proposée $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$ sera, pour ces mêmes valeurs de x, une fonction $\varphi(x)$ parfaitement définie. Nous allons montrer que cette fonction peut, pour ces valeurs de x, être développée en une série entière en x,

$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

et que les coefficients de cette série sont donnés par la formule

$$b_\beta = a_{0,\beta} + a_{1,\beta} + \ldots + a_{\alpha,\beta} + \ldots = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} a_{\alpha,\beta},$$

la série qui figure dans le second membre étant convergente. On voit que, sous les conditions requises, la série $\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$ peut être traitée comme s'il n'y avait qu'un nombre fini de termes.

38. Il y a un cas important et fréquent dans les applications où le précédent théorème est évident : c'est celui où la série à double entrée, dont les termes se déduisent de

$$| a_{\alpha,\beta} A^\beta |,$$

en donnant à α, β les valeurs entières nulles ou positives, est convergente.

S'il en est ainsi, la série à double entrée, dont le terme général est

$$a_{\alpha,\beta}\, x^\beta,$$

est absolument convergente, pour les valeurs de x qui vérifient la condition $|x| \leqq A$. En ajoutant les termes par lignes horizontales, on trouve

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} a_{\alpha,\beta}\, x^\beta = u_\alpha,$$

et en réunissant les sommes partielles on retrouve la série $\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$.
Au contraire, en ajoutant les termes par lignes verticales, on trouve

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} a_{\alpha,\beta}\, x^\beta = x^\beta \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} a_{\alpha,\beta} = b_\beta\, x^\beta,$$

puis, en réunissant les sommes partielles, on forme la série

$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_\beta x^\beta + \ldots,$$

dont la somme est donc égale à celle de la série $\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Pour que la série à termes positifs, dont le terme général est

$$|a_{\alpha,\beta}A^\beta| \qquad \begin{pmatrix}\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{pmatrix},$$

soit convergente, il faut et il suffit (n° 14) que les conditions qui suivent soient vérifiées :

1° La série à termes positifs

$$|a_{\alpha,0}|+|a_{\alpha,1}A|+|a_{\alpha,2}A^2|+\ldots$$

est convergente pour chaque valeur de α.

2° En désignant par A_α la somme de cette série, la série à termes positifs

$$A_0+A_1+\ldots+A_\alpha+\ldots$$

est convergente.

Observons que, s'il en est ainsi, la série $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$ est absolument et uniformément convergente (n° 24) pour toutes les valeurs de x qui vérifient la condition $x \leqq A$, puisque, pour ces valeurs, on a évidemment

$$|u_n| \leqq A_n,$$

en sorte qu'on est bien dans le cas du n° 24.

Observons encore que la série

$$b_0+b_1x+\ldots+b_\beta x^\beta+\ldots$$

reste convergente quand on y remplace les termes par leurs valeurs absolues et x par A, et que sa somme est alors au plus égale à la somme de la série

$$A_0+A_1+\ldots+A_\alpha+\ldots.$$

En effet, cette dernière somme n'est autre chose que la somme de la série à double entrée et à termes positifs

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}|a_{\alpha,\beta}A^\beta| = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}A^\beta\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}|a_{\alpha,\beta}|,$$

et l'on a certainement

$$|b_\beta| = \left|\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} a_{\alpha,\beta}\right| \leqq \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} |a_{\alpha,\beta}|.$$

Il importe de remarquer que si les conditions (1°) et (2°), imposées dans le présent numéro à la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha,$$

sont vérifiées, elles sont encore vérifiées pour la série

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} v_\gamma,$$

dont les termes s'obtiennent en groupant ensemble, comme la théorie des séries à double entrée permet de le faire, les termes de la série $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$ en nombre fini ou infini, en sorte que chacun de ses termes figure une fois et une fois seulement dans quelque terme de la série $\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} v_\gamma$. En effet, si l'on effectue le *même* groupement sur les termes de la série

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_\alpha + \ldots,$$

on la transformera en une série de même valeur

$$\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_\alpha + \ldots;$$

d'ailleurs v_1, qui est la somme d'un nombre fini ou infini de termes pris dans $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$, est, d'après le théorème même que nous venons de démontrer, une série entière en x, et la somme de cette série, quand on y remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et x par A, est, d'après une observation qu'on vient de faire, au plus égale à $\mathcal{A}_1$; de même pour $v_2, \ldots, v_\alpha, \ldots$ et $\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_\alpha, \ldots$.

Ainsi, la série $\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} v_\gamma$ satisfait aux mêmes conditions que la série $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$.

39. Plaçons-nous maintenant dans le cas général et supposons seulement que, pour l'ensemble des valeurs de x qui vérifient la condition

$$|x| < \mathrm{A}.$$

les séries entières en x

$$u_\alpha = a_{\alpha,0} + a_{\alpha,1} x + \ldots + a_{\alpha,\beta} x^\beta + \ldots$$

soient absolument convergentes et que la série $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_\alpha$ soit uniformément convergente [1].

La somme des $(n+1)$ premiers termes de cette dernière série est une série entière en x, convergente sous la condition $|x| < \mathrm{A}$; nous la représenterons par

$$b_{n,0} + b_{n,1} x + \ldots + b_{n,\beta} x^\beta + \ldots,$$

en posant

$$b_{n,\beta} = a_{0,\beta} + a_{1,\beta} + \ldots + a_{n,\beta}.$$

Nous allons montrer que, si n grandit indéfiniment, $b_{n,\beta}$ tend vers une limite que nous désignerons par b_β, puis, que la série

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

est convergente sous la condition $|x| < \mathrm{A}$ et que sa somme est égale à celle de la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Puisque cette dernière série est uniformément convergente, on peut, à chaque nombre positif ε, faire correspondre un entier positif r tel que, si on désigne par n et $n+p$ deux entiers plus grands que r, et d'ailleurs quelconques, on ait, pour toutes les valeurs

---

(1) WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 73.

de x plus petites que A en valeur absolue,

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

On a d'ailleurs, pour ces mêmes valeurs de x,

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} a_{n+\alpha,0}+x\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} a_{n+\alpha,1}+\ldots$$
$$+x^\beta\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} a_{n+\alpha,\beta}+\ldots.$$

Soit ρ un nombre positif, moindre que A; l'inégalité précédente ayant lieu pour tous les points de la circonférence du cercle de rayon ρ et de centre o, on a (n° 34)

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} a_{n+\alpha,\beta}\right| \leqq \varepsilon\rho^{-\beta};$$

la série

$$a_{0,\beta}+a_{1,\beta}+\ldots+a_{n,\beta}+\ldots$$

est donc convergente, puisque la somme d'autant de termes que l'on voudra, pris après le terme de rang r, peut être supposée moindre, en valeur absolue, que tel nombre que l'on voudra. Soit b_β la somme de cette série, c'est-à-dire la limite, pour n infini, de la somme $b_{n,\beta}$ de ses $n+1$ premiers termes, et soit $R_{n,\beta}$ le reste correspondant à $b_{n,\beta}$; on aura

$$b_\beta=b_{n,\beta}+R_{n,\beta}; \qquad |R_{n,\beta}|\leqq\varepsilon\rho^{-\beta}.$$

Cette dernière inégalité montre, par le premier théorème d'Abel, que la série

$$R_{n,0}+R_{n,1}x+\ldots+R_{n,\beta}x^\beta+\ldots$$

est absolument convergente si la valeur absolue de x est moindre que ρ; puisque ρ est seulement assujetti à être moindre que A, on voit même que cette série est absolument convergente pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x|<\text{A}.$$

Les séries

$$b_{n,0}+b_{n,1}x+\ldots+b_{n,\beta}x^\beta+\ldots$$

et

$$R_{n,0} + R_{n,1}x + \ldots + R_{n,\beta}x^\beta + \ldots$$

étant convergentes, il en est de même de la série

$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_\beta x^\beta + \ldots,$$

obtenue en les ajoutant terme à terme; il ne nous reste donc plus qu'à prouver que la somme de cette série est égale à la somme de la série proposée

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Or, si ρ' est un nombre positif moindre que ρ, et si l'on a

$$|x| \leqq \rho',$$

la somme

$$|R_{n,0}| + |R_{n,1}x| + \ldots + |R_{n,\beta}x^\beta| + \ldots,$$

où n est toujours supposé plus grand que r, est inférieure à

$$\varepsilon + \varepsilon\frac{\rho'}{\rho} + \ldots + \varepsilon\frac{\rho'^\beta}{\rho^\beta} + \ldots = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{\rho'}{\rho}} = \varepsilon'.$$

Donc la différence

$$R_{n,0} + R_{n,1}x + \ldots + R_{n,\beta}x^\beta + \ldots,$$

entre la somme

$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_\beta x^\beta + \ldots$$

et la somme

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

des $n + 1$ premiers termes de la série proposée, est, en valeur absolue, plus petite que ε'.

Sous la condition que x vérifie l'inégalité

$$|x| \leqq \rho',$$

on a donc

$$\left| \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} b_\beta x^\beta - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} u_n \right| < \varepsilon + \varepsilon',$$

d'où l'on conclut que, pour chacune de ces valeurs de x, le premier membre de l'inégalité précédente est nul, puisque le second membre peut être pris aussi petit qu'on le veut. Il en est de même évidemment, pourvu que x vérifie l'inégalité

$$|x| < A.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

40. Le précédent théorème entraîne une proposition analogue pour les produits infinis.

Désignons toujours par

$$u_\alpha = a_{\alpha,0} + a_{\alpha,1}x + \ldots + a_{\alpha,\beta}x^\beta + \ldots,$$

une série entière en x, convergente pour les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x| < A$. Supposons que, non seulement la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

mais aussi la série à termes positifs

$$|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

soit uniformément convergente pour ces valeurs de x, et que, en outre, sa somme reste inférieure à un nombre positif fixe. Alors le produit infini

$$P = \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 + u_n)$$

sera absolument convergent et définira une fonction $1 + \psi(x)$, $\psi(x)$ désignant une série entière en x,

$$k_0 + k_1 x + \ldots + k_\beta x^\beta + \ldots,$$

convergente pour les valeurs considérées de x.

On peut, en effet, substituer à $P - 1$ la série équivalente

$$u_0 + u_1 P_0 + \ldots + u_n P_{n-1} + \ldots,$$

où P_{n-1} est le produit des n premiers facteurs de P. Cette série (n° 24) est uniformément convergente pour les valeurs considérées de x; ses termes peuvent être mis sous forme de séries entières en x, en appliquant la règle de la multiplication des séries; on aura ainsi

$$u_0 = h_{0,0} + h_{0,1}x + \ldots + h_{0,\beta}x^\beta + \ldots \qquad (h_{0,\beta} = a_{0,\beta}),$$
$$u_n P_{n-1} = h_{n,0} + h_{n,1}x + \ldots + h_{n,\beta}x^\beta + \ldots;$$

remarquons, en passant, que les coefficients $h_{n,\beta}$ regardés comme des fonctions des $a_{i,j}$ peuvent être mis sous forme de polynomes à coefficients réels et positifs. En appliquant maintenant le théorème

précédent, on mettra la série équivalente à $P-1$ sous la forme cherchée

$$k_0+k_1x+\ldots+k_\beta x^\beta+\ldots$$

en posant

$$k_\beta=h_{0,\beta}+h_{1,\beta}+\ldots+h_{n,\beta}+\ldots,$$

où la série qui figure dans le second membre est convergente. La somme de cette série est la limite, pour n infini, de la somme de ses $n+1$ premiers termes; cette dernière somme n'est autre chose que le coefficient de x^β dans le développement de

$$u_0+u_1P_0+\ldots+u_nP_{n-1}=(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)-1;$$

k_β n'est donc autre chose que la limite, pour n infini, de ce coefficient; en particulier k_0+1 est la limite, pour n infini, de

$$P_n(0)=(1+a_{0,0})(1+a_{1,0})\ldots(1+a_{n,0}),$$

et, en supposant qu'aucun des nombres $1+a_{n,0}$ ne soit nul, k_1 est la limite, pour n infini, de

$$P_n(0)\left[\frac{a_{0,1}}{1+a_{0,0}}+\frac{a_{1,1}}{1+a_{1,0}}+\ldots+\frac{a_{n,1}}{1+a_{n,0}}\right];$$

la quantité entre crochets a donc pour limite $\frac{k_1}{1+k_0}$, en sorte que la série

$$\frac{a_{0,1}}{1+a_{0,0}}+\frac{a_{1,1}}{1+a_{1,0}}+\ldots+\frac{a_{n,1}}{1+a_{n,0}}+\ldots$$

est convergente et a pour somme $\frac{k_1}{1+k_0}$.

41. Il convient d'examiner le cas particulier, qui correspond au cas du n° 38, où la série à double entrée, à termes positifs,

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty}|a_{\alpha,\beta}A^\beta|$$

est convergente. Il est aisé de voir qu'alors la série équivalente à $P-1$,

$$u_0+u_1P_0+\ldots+u_nP_{n-1}+\ldots,$$

satisfait, pour les valeurs de x telles que l'on ait

$$|x|\leqq A,$$

aux conditions 1° et 2° du n° 38. En effet, en conservant d'ailleurs les notations du numéro précédent, considérons le produit infini à termes positifs

$$Q = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + A_n),$$

et la série à termes positifs, équivalente à $Q - 1$,

$$A_0 + A_1 Q_0 + \ldots + A_n Q_{n-1} + \ldots,$$

où Q_n est le produit des $n+1$ premiers facteurs de Q. Le produit $A_n Q_{n-1}$ pourra, par des multiplications de séries, être mis sous la forme

$$H_{n,0} + H_{n,1} A + \ldots + H_{n,\beta} A^\beta + \ldots,$$

où les $H_{n,\beta}$ sont les mêmes fonctions des $|a_{i,j}|$ que les $h_{n,\beta}$ des $a_{i,j}$. En vertu d'une remarque antérieure on aura donc

$$|h_{n,\beta}| \leqq H_{n,\beta};$$

la série

$$|h_{n,0}| + |h_{n,1}| A + \ldots + |h_{n,\beta}| A^\beta + \ldots$$

est donc convergente et sa somme est au plus égale à $A_n Q_{n-1}$. D'ailleurs la série à termes positifs

$$A_0 + A_1 Q_0 + \ldots + A_n Q_{n-1} + \ldots$$

est convergente; la série équivalente à $P - 1$ vérifie donc, pour les valeurs de x qui satisfont à l'inégalité $|x| \leqq A$, les conditions 1° et 2° du n° 38 et peut donc se mettre sous la forme

$$k_0 + k_1 x + \ldots + k_\beta x^\beta + \ldots.$$

C'est précisément le résultat que nous avons obtenu dans le numéro précédent, pour le cas général.

Il est aisé de voir que, dans le cas qui nous occupe, la série qui fournit $\dfrac{k_1}{1 + k_0}$ est absolument convergente.

Enfin, en vertu d'une remarque faite au n° 38, la série

$$k_0 + k_1 x + \ldots + k_\beta x^\beta + \ldots,$$

qui reste convergente quand on y remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et x par A, a alors une somme qui est au

plus égale à celle de la série

$$A_0 + A_1 Q_0 + \ldots + A_n Q_{n-1} + \ldots = Q - 1.$$

Il convient de remarquer, comme dans le n° 38, que, si les conditions imposées ici au produit infini

$$P = (1 + u_0)(1 + u_1)\ldots(1 + u_n)\ldots$$

sont vérifiées, elles le sont encore pour le produit infini égal

$$(1 + w_0)(1 + w_1)\ldots(1 + w_i)\ldots,$$

dont les *facteurs* s'obtiennent en groupant ensemble, en nombre fini ou infini, les *facteurs* du produit P, ainsi que permet de le faire la théorie des produits infinis à double entrée. En effet, si on effectue le *même* groupement sur le produit infini

$$Q = (1 + A_0)(1 + A_1)\ldots(1 + A_n)\ldots,$$

on le transformera en un produit infini égal

$$Q = (1 + B_0)(1 + B_1)\ldots(1 + B_i)\ldots;$$

d'ailleurs $1 + w_0$ étant obtenu en faisant le produit d'un nombre fini ou infini de facteurs de P, pris chacun une fois, w_0 peut, d'après le théorème même que nous venons de démontrer, être mis sous la forme d'une série entière en x qui reste convergente quand on remplace tous ses coefficients par leurs valeurs absolues et dont la somme est alors au plus égale à B_0; de même pour $w_1, w_2, \ldots$ et $B_1, B_2, \ldots$; enfin la série à termes positifs

$$B_0 + B_1 + \ldots + B_i + \ldots$$

est convergente; les conditions sont donc vérifiées pour le produit transformé.

42. Nous allons maintenant déduire quelques conséquences très importantes de la proposition du n° 37.

Soit

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série dont le rayon de convergence est R. Pour une valeur

quelconque x satisfaisant à la condition

$$|x| < \mathrm{R},$$

la fonction $\mathfrak{P}(x)$ admet des dérivées première, seconde, etc., au sens de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire; c'est-à-dire que l'expression

$$\frac{\mathfrak{P}(x+h)-\mathfrak{P}(x)}{h}$$

tend vers une limite $\mathfrak{P}'(x)$ quand h tend vers zéro ([1]), que l'expression

$$\frac{\mathfrak{P}'(x+h)-\mathfrak{P}'(x)}{h}$$

tend, dans les mêmes conditions, vers une limite $\mathfrak{P}''(x)$, et ainsi de suite. Les dérivées successives de $\mathfrak{P}(x)$ ne sont autres que les sommes des séries convergentes

$$1.a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$
$$1.2a_2 + 2.3a_3x + \ldots + (n-1)na_nx^{n-2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit en effet x un nombre que nous regarderons comme fixe dans ce qui suit et dont nous supposerons la valeur absolue X moindre que R; soient H un nombre positif fixe moindre que R — X et h une variable qui reste en valeur absolue moindre que H. Désignons enfin par A_0, A_1, ..., A_n, ... les valeurs absolues de a_0, a_1, ..., a_n, ... D'après le premier théorème d'Abel (n° 30) la série à termes positifs

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1(\mathrm{X}+\mathrm{H}) + \ldots + \mathrm{A}_n(\mathrm{X}+\mathrm{H})^n + \ldots,$$

est convergente et il en est de même de la série

$$\mathfrak{P}(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots.$$

([1]) En d'autres termes, pour une valeur déterminée de x, au nombre $\mathfrak{P}(x)$ correspond un nombre $\mathfrak{P}'(x)$ jouissant de la propriété suivante : à chaque nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre η tel que l'on ait

$$\left|\frac{\mathfrak{P}(x+h)-\mathfrak{P}(x)}{h} - \mathfrak{P}'(x)\right| < \varepsilon$$

sous la seule condition

$$0 < |h| < \eta.$$

On a d'ailleurs

$$a_n(x+h)^n = a_n x^n + \frac{n}{1} a_n x^{n-1} h_n + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} a_n x^{n-p} h^p + \ldots,$$

et la somme des valeurs absolues des termes du polynome en h qui figure au second membre, quand on y remplace h par H, n'est autre chose que $A_n(X+H)^n$. La série

$$A_0 + A_1(X+H) + \ldots + A_n(X+H)^n + \ldots,$$

étant convergente, on voit que la série $\mathfrak{P}(x+h)$, où l'on regarde h comme la variable, se trouve dans le cas du n° 38; elle peut être mise sous la forme d'une série à double entrée absolument convergente, qui peut être elle-même ordonnée suivant les puissances de h. Les séries partielles

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$1.a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui figurent comme coefficients de $h^0, \frac{h^1}{1}, \frac{h^2}{1.2}, \ldots$, sont absolument convergentes et, en désignant les sommes de ces séries par $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}'(x)$, $\mathfrak{P}''(x)$, ..., on aura

$$\mathfrak{P}(x+h) = \mathfrak{P}(x) + \frac{h}{1}\mathfrak{P}'(x) + \frac{h^2}{1.2}\mathfrak{P}''(x) + \ldots.$$

Cette formule subsiste tant que l'on a

$$|h| \leqq H.$$

On déduit de cette formule la relation suivante

$$\frac{\mathfrak{P}(x+h) - \mathfrak{P}(x)}{h} = \mathfrak{P}'(x) + \frac{h}{1.2}\mathfrak{P}''(x) + \ldots,$$

qui montre, puisque le second membre est une fonction continue de h, que l'on a

$$\lim_{h=0} \frac{\mathfrak{P}(x+h) - \mathfrak{P}(x)}{h} = \mathfrak{P}'(x),$$

et ainsi de suite.

Les séries $\mathfrak{P}'(x)$, $\mathfrak{P}''(x)$, ..., absolument convergentes tant que l'on a

$$|x| < \mathrm{R},$$

ne peuvent être convergentes pour une valeur b de x telle que l'on ait

$$|b| > \mathrm{R}.$$

Si $\mathfrak{P}'(x)$, en effet, était convergente pour $x = b$, on aurait

$$\lim_{n=\infty} . |n a_n b^n| = 0$$

et *a fortiori*

$$\lim_{n=\infty} . |a_n b^n| = 0;$$

par suite la série $\mathfrak{P}(x)$ serait convergente pour les valeurs de x satisfaisant aux conditions

$$\mathrm{R} < |x| < |b|.$$

Toutes les séries $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}'(x)$, $\mathfrak{P}''(x)$, ... ont donc le même cercle de convergence. Il peut d'ailleurs arriver que, sur la circonférence, la première série soit convergente sans que les autres le soient : c'est ce qui arrive si l'on suppose

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots.$$

La série

$$\mathfrak{P}(x) + \frac{h}{1}\mathfrak{P}'(x) + \frac{h^2}{1.2}\mathfrak{P}''(x) + \ldots,$$

convergente assurément si l'on a

$$|h| \leqq \mathrm{R} - \mathrm{X},$$

peut être convergente pour d'autres valeurs de h. Ce fait sert de fondement à la théorie de la continuation que l'on développera plus tard (n^{os} 51-60); la proposition qui fait l'objet principal du numéro suivant résulterait immédiatement de cette théorie; toutefois nous la plaçons ici pour ne pas interrompre la suite des idées.

43. Soit $\mathfrak{P}(x)$ une série entière en x, convergente dans un cercle C de rayon R et dont tous les coefficients ne sont pas nuls. En un point x_1 intérieur à C la fonction $\mathfrak{P}(x)$ ne peut pas être nulle ainsi que toutes ses dérivées.

En effet, si l'on pose

$$x = x_1 + h, \qquad |h| < R - |x_1|,$$

on aura

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x_1) + \frac{\mathfrak{P}'(x_1)}{1} h + \ldots + \frac{\mathfrak{P}^{(n)}(x_1)}{1.2\ldots n} h^n + \ldots.$$

Supposons que $\mathfrak{P}(x)$ soit nulle ainsi que toutes ses dérivées pour $x = x_1$; alors le second membre sera nul quel que soit h; le premier membre sera donc nul pour toutes les valeurs de x qui vérifient la condition

$$|x - x_1| < R - |x_1|,$$

sous laquelle le développement de $\mathfrak{P}(x)$, suivant les puissances de $h = x - x_1$ est légitime; c'est-à-dire que $\mathfrak{P}(x)$ sera nulle pour tous les points x situés à l'intérieur du cercle C_1 décrit de x_1 comme centre et tangent intérieurement au cercle C. Il en sera de même de toutes les dérivées de $\mathfrak{P}(x)$, ainsi qu'on le voit soit en regardant une dérivée comme la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, soit parce que l'on peut écrire pour les dérivées $\mathfrak{P}'(x)$, $\mathfrak{P}''(x)$, ... des développements suivant les puissances de h analogues à celui de $\mathfrak{P}(x)$ que nous venons de considérer.

Si le cercle C_1 contient le point o, la fonction $\mathfrak{P}(x)$ étant nulle en ce point ainsi que toutes ses dérivées, tous les coefficients de son développement suivant les puissances de x devraient être nuls (n° 36), ce qui est contraire à l'hypothèse. Si le cercle C_1 ne contient pas le point o, on prendra à l'intérieur de ce cercle, sur le rayon opposé à celui qui aboutit au point x_1, un point x_2 pour lequel on appliquera le même raisonnement; $\mathfrak{P}(x)$ devra être nulle ainsi que toutes ses dérivées pour tous les points intérieurs au cercle C_2 décrit de x_2 comme centre et tangent intérieurement à C. Si le cercle C_2 contient le point o, la démonstration est terminée; sinon, en continuant de la même façon, on parviendra évidemment à enfermer, au bout d'un nombre fini d'opérations, le point o dans un cercle à l'intérieur duquel on saurait que la fonction $\mathfrak{P}(x)$ est nulle ainsi que toutes ses dérivées et l'on arrive toujours à la même conclusion.

44. Voici maintenant quelques conséquences importantes de

cette proposition et qu'il faut rapprocher des résultats analogues obtenus dans le n° 36 pour le point o.

Pour $x = x_1$ la fonction $\mathfrak{P}(x)$ peut être nulle ainsi que ses dérivées, $\mathfrak{P}'(x_1)$, $\mathfrak{P}''(x_1)$, ...; mais il existe une dérivée $\mathfrak{P}^{(n)}(x_1)$ qui n'est pas nulle. En supposant que toutes celles d'un ordre moindre soient nulles, on peut écrire

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\mathfrak{P}^{(n)}(x_1)}{1.2\ldots n}(x-x_1)^n + \frac{\mathfrak{P}^{(n+1)}(x_1)}{1.2\ldots(n+1)}(x-x_1)^{n+1} + \ldots$$

ou

$$\mathfrak{P}(x) = (x-x_1)^n \mathrm{P}(x-x_1),$$

$\mathrm{P}(x-x_1)$ désignant une série entière en $(x-x_1)$ qui n'est pas nulle pour $x = x_1$ et qui est convergente dans le cercle C_1; on dit alors que x_1 est un zéro d'ordre n de $\mathfrak{P}(x)$.

Le point x_1, intérieur au cercle C, ne peut pas être la limite d'un ensemble infini de points pour lesquels $\mathfrak{P}(x)$ s'annule, par exemple x_1 ne peut pas appartenir à un arc de courbe, si petit qu'il soit, en tous les points duquel $\mathfrak{P}(x)$ s'annulerait.

Deux séries entières en x, convergentes dans le cercle C, ne peuvent avoir des valeurs égales pour les points d'un ensemble infini admettant pour limite un point x_1 intérieur à C, par exemple pour tous les points d'un arc de courbe intérieur à C, sans être identiques, c'est-à-dire sans que les coefficients correspondants dans les deux séries soient égaux.

Enfin dans un cercle C′ concentrique à C et de rayon moindre, il ne peut exister une infinité de points distincts pour lesquels $\mathfrak{P}(x)$ s'annule : si l'on considère, en effet, l'ensemble infini que formeraient ces points, on voit qu'il admettrait nécessairement comme point limite un point intérieur à C′ ou situé sur sa circonférence ([1]) et dans tous les cas intérieur au cercle C.

45. Soit

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série convergente dans le cercle C; la série

$$\mathfrak{Q}(x) = \frac{a_0}{1}x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

([1]) C'est une généralisation facile du théorème de Bolzano (*voir* l'*Introduction à la théorie des fonctions,* de M. J. Tannery, p. 42, n° 38).

sera convergente au moins dans le même cercle, car si, pour une valeur particulière de x, $|a_n x^n|$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, il en est de même de $\left|\frac{a_n}{n+1} x^n\right|$. D'ailleurs, la dérivée $\mathfrak{Q}'(x)$ de la série $\mathfrak{Q}(x)$ est égale à $\mathfrak{P}(x)$; les deux séries $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(x)$ ont donc le même cercle de convergence (n° 42). Enfin, on peut démontrer que, sur la circonférence même, la série $\mathfrak{Q}(x)$ est convergente aux points où la série $\mathfrak{P}(x)$ est elle-même convergente ([1]); mais inversement, comme nous l'avons déjà fait observer dans le n° 42, *sur* la circonférence, la convergence de $\mathfrak{Q}(x)$ n'entraîne pas celle de $\mathfrak{P}(x)$.

De l'égalité

$$\mathfrak{Q}'(x) = \mathfrak{P}(x)$$

résulte la conséquence suivante : si l'on considère un arc de courbe γ, intérieur au cercle C, défini par la relation

$$x = \varphi(t) + i\psi(t)$$

où la variable réelle t doit varier de t_0 à t_1 et où $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions réelles de t, admettant les dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, on aura, en prenant l'intégrale le long de l'arc γ et en désignant par x_0, x_1 les extrémités de cet arc qui correspondent aux valeurs t_0, t_1 de t,

$$\int_\gamma \mathfrak{P}(x)\,dx = \mathfrak{Q}(x_1) - \mathfrak{Q}(x_0) \quad ([2]).$$

46. Reprenons les notations du n° 37 et considérons à nouveau

---

([1]) C'est une conséquence de la seconde des propositions énoncées dans la note du n° 31.

([2]) Nous rappelons rapidement la démonstration de cette proposition, afin d'éviter, dans l'esprit du lecteur, toute confusion entre les intégrales relatives aux variables imaginaires et celles qui se rapportent aux variables réelles.

Si, pour les valeurs de x que définit la relation $x = \varphi(t) + i\psi(t)$, on a, en désignant par $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $\Phi_1(t)$, $\Psi_1(t)$ des fonctions réelles,

$$\mathfrak{Q}(x) = \Phi(t) + i\Psi(t), \qquad \mathfrak{Q}'(x) = \mathfrak{P}(x) = \Phi_1(t) + i\Psi_1(t),$$

on aura

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{Q}(x)] = \mathfrak{Q}'(x)\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]$$

ou

$$\Phi'(t) + i\Psi'(t) = [\Phi_1(t) + i\Psi_1(t)]\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]$$

une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont tous les termes ([1]) sont des fonctions de x satisfaisant aux diverses conditions imposées dans ce n° 37. La somme $\varphi(x)$ de cette série peut, comme on l'a vu plus haut, être mise sous forme d'une série entière en x pour les valeurs de la variable qui satisfont à la condition

$$|x| < A;$$

---

et, par suite,

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \Phi'(t) = \Phi_1(t)\,\varphi'(t) - \Psi_1(t)\,\psi'(t), \\ \Psi'(t) = \Phi_1(t)\,\psi'(t) + \Psi_1(t)\,\varphi'(t). \end{cases}$$

D'ailleurs on a, par définition,

$$\int_\gamma \mathfrak{P}(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_1(t)\,\varphi'(t) - \Psi_1(t)\,\psi'(t)]\,dt$$
$$+ i\int_{t_0}^{t_1} [\Phi_1(t)\,\psi'(t) + \Psi_1(t)\,\varphi'(t)]\,dt:$$

or les intégrales qui figurent dans le second membre ayant le sens de la théorie des fonctions d'une variable réelle, on voit, en tenant compte des égalités (I), que ces intégrales sont respectivement égales à

$$\Phi(t_1) - \Phi(t_0), \quad \Psi(t_1) - \Psi(t_0),$$

ce qui démontre l'égalité

$$\int_\gamma \mathfrak{P}(x)\,dx = \mathfrak{Q}(x_1) - \mathfrak{Q}(x_0).$$

On aurait pu établir le même résultat en partant du théorème démontré au n° 28. En supposant la courbe γ intérieure à un cercle C' concentrique à C et de rayon moindre et en se rappelant que, dans ce cercle C', la série $\mathfrak{P}(x)$ est uniformément convergente, on voit qu'on pourrait écrire

$$\int_\gamma \mathfrak{P}(x)\,dx = a_0\int_\gamma dx + a_1\int_\gamma x\,dx + \ldots + a_n\int_\gamma x^n\,dx + \ldots;$$

il resterait à établir les égalités

$$\int_\gamma x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x_1^{n+1} - x_0^{n+1})$$

qui sont, au fond, des cas particuliers de l'égalité que nous voulons démontrer, mais qu'il est facile d'établir directement en se reportant à la définition des intégrales prises le long d'une courbe.

([1]) Nous écrirons $u_n(x)$ à la place de u_n quand nous aurons besoin de mettre la variable en évidence.

elle admet donc (n° 42) pour ces valeurs, des dérivées $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ...; nous allons montrer que, si l'on désigne par u'_n, u''_n, ..., les dérivées successives de la fonction u_n, dérivées qui existent aussi en vertu du précédent numéro, les séries

$$\begin{gathered} u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n + \ldots, \\ u''_0 + u''_1 + \ldots + u''_n + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

sont convergentes pour les mêmes valeurs de x et ont pour sommes

$$\varphi'(x), \quad \varphi''(x), \quad \ldots.$$

Soit en effet x un nombre fixe dont la valeur absolue X soit moindre que A : soit h une variable dont la valeur absolue H reste moindre que A — X. Considérons la série

$$\varphi(x+h) = u_0(x+h) + u_1(x+h) + \ldots + u_n(x+h) + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions de h ; on a, d'après le n° 42,

$$u_n(x+h) = u_n + \frac{u'_n}{1} h + \frac{u''_n}{1.2} h^2 + \ldots;$$

d'ailleurs la série $\varphi(x+h)$ est uniformément convergente pour les valeurs considérées de h ; on peut donc appliquer le théorème du n° 37 et mettre $\varphi(x+h)$ sous la forme d'une série entière en h ; on aura ainsi

$$\varphi(x+h) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n + \frac{h}{1} \sum_{n=0}^{n=\infty} u'_n + \frac{h^2}{1.2} \sum_{n=0}^{n=\infty} u''_n + \ldots,$$

et le théorème est démontré.

47. Supposons maintenant que, pour les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x| < \text{A},$$

la série

$$|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

soit uniformément convergente et que sa somme reste inférieure à un nombre positif fixe, le produit

$$\text{P}(x) = \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 + u_n)$$

pourra, pour ces valeurs de x, être mis sous la forme d'une série entière ; la fonction $P(x)$ admet donc des dérivées. Pour les former, on mettra le produit infini

$$P(x+h) = \prod_{n=0}^{n=\infty} [1 + u_n(x+h)]$$

sous la forme d'une série entière en h, ce qui, en vertu du même raisonnement que pour la série, est possible pour toutes les valeurs de h qui vérifient la condition

$$|h| < A - |x|.$$

On a vu, n° 40, que, dans ce développement, le coefficient de la première puissance de la variable, qui est ici h, peut se mettre sous la forme

$$P(x)\left[\frac{u'_0(x)}{1+u_0(x)} + \frac{u'_1(x)}{1+u_1(x)} + \ldots + \frac{u'_n(x)}{1+u_n(x)} + \ldots\right],$$

pourvu qu'aucune des fonctions

$$1+u_0(x), \quad 1+u_1(x), \quad \ldots, \quad 1+u_n(x), \quad \ldots$$

ne soit nulle, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x telles que $P(x)$ soit différent de zéro. On a donc, en désignant par $P'(x)$ la dérivée de $P(x)$,

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{u'_0}{1+u_0} + \frac{u'_1}{1+u_1} + \ldots + \frac{u'_n}{1+u_n} + \ldots,$$

et l'on voit que la *dérivée logarithmique* de $P(x)$ est la somme des dérivées logarithmiques de ses facteurs. Si $P(x)$ était nul, il faudrait que l'un des facteurs, $1+u_n$ par exemple, fût nul ; on verrait alors sans peine que la dérivée de $P(x)$ serait donnée par la formule

$$P'(x) = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})u'_n(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots;$$

c'est encore la même règle que pour un produit limité.

48. Plaçons-nous maintenant dans le cas du n° 38, où, en conservant les notations de ce numéro, la série à double entrée et à

termes positifs

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} | a_{\alpha,\beta} A^\beta |$$

est convergente. Désignons par

$$U_n(x) = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} | a_{n,\beta} | x^\beta,$$

ce que devient la série $u_n(x)$ quand on y remplace les coefficients $a_{n,\beta}$ par leurs valeurs absolues; il est clair que les dérivées $U'_n(x)$, $U''_n(x)$, ... de $U_n(x)$ ne seront autres que les séries $u'_n(x)$, $u''_n(x)$, ... dans lesquelles on remplace aussi les coefficients par leurs valeurs absolues. On voit de suite que la série

$$\varphi(x+h) = u_0(x+h) + u_1(x+h) + \ldots + u_n(x+h) + \ldots,$$

où l'on regarde x comme une constante dont la valeur absolue X est moindre que A, et h comme une variable dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $A - X$; satisfait, elle aussi, aux conditions (1°) et (2°) du n° 38; en effet, chacun de ses termes peut être remplacé par une série entière en h; et (1°) si, dans la série

$$u_n(x) + u'_n(x)\frac{h}{1} + u''_n(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots = u_n(x+h),$$

on remplace les coefficients des puissances de h par leurs valeurs absolues et h par $A - X$, on formera une série dont les termes seront respectivement moindres que les termes correspondants de la série

$$U_n(X) + U'_n(X)\frac{A-X}{1} + U''_n(X)\frac{(A-X)^2}{1.2} + \ldots = U_n(A) = A_n;$$

d'ailleurs (2°) la série

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$$

est convergente. Dès lors, on peut appliquer à la série qui représente $\varphi(x+h)$ et au produit infini

$$P(x+h) = \prod_{n=0}^{n=\infty} [1 + u_n(x+h)]$$

les résultats obtenus dans les nos 38, 41, et l'on a ainsi établi, sans s'appuyer sur la proposition générale du n° 37, que les séries

$$\begin{gathered} u'_0(x) + u'_1(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots, \\ u''_0(x) + u''_1(x) + \ldots + u''_n(x) + \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

sont absolument convergentes tant que l'on a $|x| < A$, qu'elles représentent les dérivées $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ... de la série $\varphi(x)$ et que, en supposant toutefois $P(x)$ différent de zéro, la série

$$\frac{u'_0(x)}{1 + u_0(x)} + \frac{u'_1(x)}{1 + u_1(x)} + \ldots + \frac{u'_n(x)}{1 + u_n(x)} + \ldots$$

est absolument convergente dans les mêmes conditions et représente la dérivée logarithmique de $P(x)$.

Il est aisé de voir, en outre, que la série

$$u'_0(x) + u'_1(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots$$

satisfait aussi, ainsi que les dérivées suivantes de $\varphi(x)$, aux conditions (1°) et (2°) du n° 38, pourvu qu'on remplace A par $A - \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on le voudra.

Enfin, en vertu de remarques faites dans les nos 38 et 41, des conclusions pareilles s'appliquent aux séries et produits infinis que l'on peut déduire de la série $\varphi(x)$ ou du produit infini $P(x)$ en groupant les termes ou les facteurs de cette série ou de ce produit.

49. Voici encore une conséquence du n° 37. Soient

$$\begin{aligned} f(y) &= a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n + \ldots, \\ \varphi(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots \end{aligned}$$

deux séries entières, la première en y, la seconde en x.

Supposons, en désignant par A et B deux nombres positifs, que pour les valeurs de x qui vérifient la condition

$$|x| < A,$$

la seconde série soit absolument convergente et que l'on ait

$$|\varphi(x)| \leq B;$$

supposons, de plus, que la première série soit absolument convergente pour $y = B$.

La première série, quand on y regarde y comme égal à $\varphi(x)$, est uniformément convergente pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x| < A$; d'ailleurs $[\varphi(x)]^n$, pour ces valeurs, à cause de la règle de multiplication des séries, peut être mis sous la forme d'une série entière en x; il en est donc de même de la fonction $f[\varphi(x)]$.

En particulier, on se trouvera dans le cas du n° 38, si la série à termes positifs

$$|b_0| + |b_1 A| + \ldots + |b_n A^n| + \ldots$$

est convergente et a une somme égale ou inférieure à B.

50. La proposition précédente montre que l'inverse d'une série entière en x

$$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

convergente sous la condition

$$|x| < C,$$

où C est un nombre positif, peut elle-même être mise sous la forme d'une série entière en x, quand le premier coefficient c_0 n'est pas nul.

On peut, en effet, poser

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

puis écrire

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(x)} = \frac{1}{c_0 + y} = \frac{1}{c_0} - \frac{y}{c_0^2} + \frac{y^2}{c_0^3} - \frac{y^3}{c_0^4} + \ldots$$

pourvu que l'on ait

$$|y| < |c_0|;$$

on peut d'ailleurs déterminer un nombre positif $D < C$, tel que, sous la condition

$$|x| < D$$

on ait

$$|y| < K < |c_0|,$$

K étant un nombre positif; cela résulte de la continuité de la série

$$c_0 x + c_1 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

dans le voisinage de $x = 0$. Dès lors, on voit que, pourvu que x soit moindre que D en valeur absolue, les conditions requises pour l'application du théorème du numéro précédent sont vérifiées, et, par conséquent, pour ces mêmes valeurs de x, l'inverse de $\mathfrak{P}(x)$ est elle-même une série entière en x.

Il en sera de même du rapport

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}(x)},$$

où $\mathfrak{P}_1(x)$ est une autre série entière en x, convergente lorsque l'on a $|x| < D$, comme on le voit en multipliant les deux séries

$$\mathfrak{P}_1(x), \quad \frac{1}{\mathfrak{P}(x)};$$

au surplus, pour trouver les coefficients de la série égale au rapport considéré, on pourra, au lieu d'appliquer le procédé précédent, employer la méthode des coefficients indéterminés ou effectuer la division comme s'il s'agissait de polynomes ordonnés suivant les puissances ascendantes de x.

Des considérations d'une autre nature montrent que le cercle de convergence de la série entière en x qui est égale à $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ est la plus petite des valeurs absolues des racines de l'équation $\mathfrak{P}(x) = 0$.

IV. — Continuation des fonctions.

51. Les paragraphes précédents montrent comment la considération des séries entières donne naissance à des fonctions de x continues, admettant des dérivées. Toutes ces fonctions, obtenues par des séries entières, ou des combinaisons, en nombre fini ou infini, de ces séries, se ramènent elles-mêmes à des séries entières, et se trouvent toujours, à moins qu'il ne s'agisse de fonctions transcendantes entières, enfermées dans un cercle, le cercle de convergence de la série finale. Il nous reste à montrer com-

ment on peut sortir de ce cercle : on y arrive par la notion de la *continuation des fonctions* (¹).

Soit

$$\mathfrak{P}_0(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

une série entière en $x - x_0$, admettant pour cercle de convergence le cercle C_0, de centre x_0, de rayon R_0. La somme de cette série définit une fonction de x pour toutes les valeurs de la variable qui vérifient la condition

$$|x-x_0| < R_0.$$

Cette série est, suivant la terminologie de M. Weierstrass, un *élément de fonction analytique*.

Soit, maintenant, x_1 un point situé à l'*intérieur* du cercle C_0. Si l'on fait

$$x - x_0 = x_1 - x_0 + h, \qquad h = x - x_1,$$

il existera, d'après le n° **42**, une série procédant suivant les puissances de h, ayant la même somme que la série proposée, et convergente tant que l'on aura

$$|x-x_1| < R_0 - |x_1 - x_0|,$$

c'est-à-dire tant que le point x est à l'intérieur du cercle décrit du point x_1 comme centre, et tangent intérieurement au cercle C_0; nous désignerons cette série par

$$\mathfrak{P}_1(x-x_1) = b_0 + b_1(x-x_1) + \ldots + b_n(x-x_1)^n + \ldots.$$

Les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ ne sont autre chose que les valeurs, pour $x = x_1$, des fonctions

$$\mathfrak{P}_0(x-x_0), \quad \frac{d}{dx}\mathfrak{P}_0(x-x_0), \quad \ldots, \quad \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\mathfrak{P}_0(x-x_0), \quad \ldots.$$

Désignons par R_1 le rayon du cercle de convergence C_1 de la série $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$. Deux cas peuvent se présenter : ou bien l'on

(¹) M. Méray, qui, par son enseignement et ses publications, a été l'un de ceux qui ont le plus contribué à fonder la théorie des fonctions sur la considération des séries entières, emploie l'expression de *cheminement*.

aura, quel que soit le point x_1 intérieur au cercle C_0,

$$R_1 = R_0 - |x_1 - x_0|;$$

ou bien, pour certains points au moins, on aura

$$R_1 > R_0 - |x_1 - x_0|.$$

Dans le premier cas, dont on a d'ailleurs des exemples [1], la

---

[1] Telle est la série signalée par M. Lerch (*Acta mathematica,* t. X, p. 87)

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} x^{1.2\ldots n}$$

dont le cercle de convergence a pour rayon 1 : si l'on pose

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (r < 1)$$

et si l'on suppose $\varphi = \frac{p}{q}2\pi$, p et q étant entiers, on voit sans peine qu'on peut écrire, pour cette valeur de la variable,

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=1}^{n=q-1} x^{1.2\ldots n} + \sum_{n=q}^{n=\infty} r^{1.2\ldots n}.$$

La seconde partie du deuxième membre est réelle et la valeur absolue de la première est moindre que $q-1$: la seconde partie croît d'ailleurs indéfiniment quand r tend vers un, par des valeurs croissantes; il en est donc de même de $|\mathfrak{P}(x)|$ quand le point x s'approche de la circonférence du cercle C_0 en restant sur le rayon qui aboutit au point dont l'affixe est

$$\cos\frac{p}{q}2\pi + i\sin\frac{p}{q}2\pi;$$

on en conclut que ce point ne peut être situé à l'*intérieur* du cercle de convergence d'une série $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ déduite de $\mathfrak{P}(x)$ comme il a été expliqué dans le texte. D'ailleurs sur tout arc de la circonférence du cercle C_0 se trouvent une infinité de points dont l'affixe a la forme précédente; tous les cercles de convergence des séries telles que $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ sont donc tangents intérieurement au cercle C_0. Il en serait de même pour la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} x^{n^2}$$

et d'autres séries analogues qui se rencontrent dans la théorie des fonctions elliptiques, mais la démonstration est un peu plus compliquée. On pourra consulter sur ce sujet un intéressant article de M. Méray dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. XII, p. 248.

fonction définie par la première série $\mathfrak{P}(x-x_0)$ est réellement enfermée dans le cercle de convergence C_0; elle ne peut être *continuée* au delà.

Le second cas est celui qui se présente le plus souvent dans les applications élémentaires; nous allons nous y arrêter.

52. Dans le cas qui nous occupe maintenant, les deux cercles C_0 et C_1 ont une partie commune $[C_0, C_1]$. Nous allons démontrer que, en tout point ξ, intérieur à la fois aux cercles C_0, C_1, les deux séries $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ représentent la même fonction.

D'abord, pour tout point x', situé à l'intérieur du cercle C'_1 décrit du point x_1 comme centre et tangent intérieurement à C_0, les deux fonctions $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ sont égales ainsi que leurs dérivées. La chose est évidente pour les dérivées, si l'on regarde celles-ci comme les limites du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable. Elle apparaît aussi clairement, si l'on compare les deux développements

$$\mathfrak{P}_0(x'-x_0)+\frac{h}{1}\mathfrak{P}'_0(x'-x_0)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\mathfrak{P}_0^{(n)}(x'-x_0)+\ldots,$$

$$\mathfrak{P}_1(x'-x_1)+\frac{h}{1}\mathfrak{P}'_1(x'-x_1)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\mathfrak{P}_1^{(n)}(x'-x_1)+\ldots,$$

développements où $\mathfrak{P}_0^{(n)}(x'-x_0)$, $\mathfrak{P}_1^{(n)}(x'-x_1)$ désignent les valeurs pour $x=x'$ des $n^{\text{ièmes}}$ dérivées par rapport à x de $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$, et que l'on obtient en remplaçant, dans ces dernières fonctions, x par $x'+h$, puis en développant suivant les puissances de h. Ces deux séries entières en h doivent avoir des valeurs égales pour des valeurs suffisamment petites de h, et, par conséquent, doivent avoir leurs coefficients correspondants égaux (nº 36). Si donc le point ξ est intérieur au cercle C'_1, les deux séries $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ ont même valeur en ce point, ainsi que toutes leurs dérivées.

Si l'on considère, en général, deux points quelconques x_1 et ξ, on peut les supposer reliés de la façon suivante. Imaginons une suite formée par un nombre fini de points, d'ailleurs aussi rapprochés qu'on voudra,

$$x_1, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad \xi,$$

dont les points x_1 et ξ soient le premier et le dernier, et une suite correspondante de cercles

$$c_1, \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_n, \quad \Gamma,$$

tels que le centre de chaque cercle soit le point correspondant de la suite

$$x_1, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad \xi,$$

et que chaque cercle contienne, à son intérieur, le centre du cercle suivant. Nous appellerons la figure formée par ces cercles et leurs centres *chaîne de cercles* entre x_1 et ξ (¹).

Les points x_1 et ξ étant intérieurs à l'espace $[C_0, C_1]$, nous supposerons la chaîne formée de cercles qui soient tous intérieurs à cet espace et qui n'en touchent même pas la limite. On pourra, si l'on veut, prendre, par exemple, les points $\xi_1, \xi_2, \ldots; \xi_n$ sur le segment de droite qui joint x_1 à ξ.

Ceci posé, en tout point du cercle c_1, les deux séries $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ ont les mêmes valeurs, ainsi que toutes leurs dérivées; nous dirons que, dans ce cercle, elles *coïncident*. Le point ξ_1 est intérieur aux cercles c_1, C_0, C_1. Si, dans l'une ou l'autre des séries $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$, on remplace x par $\xi_1+x-\xi_1$ et qu'on ordonne par rapport à $x-\xi_1$, on formera deux séries identiques entières en $x-\xi_1$. On peut représenter l'une ou l'autre par

$$\varpi_1(x-\xi_1);$$

cette dernière série converge sûrement dans le cercle Γ_1, intérieur aux cercles C_0, C_1, et y coïncide tant avec $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ qu'avec $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$. Le point ξ_2 est intérieur aux cercles C_0, C_1, Γ_1. Si, dans les séries $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$, $\varpi_1(x-\xi_1)$, on remplace x par $\xi_2+x-\xi_2$ et qu'on ordonne par rapport à $x-\xi_2$, on formera trois séries identiques entières en $x-\xi_2$, et dont l'une quelconque peut être représentée par

$$\varpi_2(x-\xi_2);$$

cette dernière série converge dans tout le cercle Γ_2 intérieur à

(¹) Il est souvent commode de supposer que chaque cercle contienne aussi le centre du cercle précédent, afin qu'on puisse *descendre* la chaîne en allant de ξ à x_1, comme on la *monte* en allant de x_1 à ξ.

C_0 et à C_1, et y coïncide avec $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ et $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$. On continuera de la même façon, et l'on parviendra ainsi, par un nombre *fini* d'opérations, à une série entière en $x-\xi$,

$$\varpi(x-\xi),$$

convergente dans le cercle Γ de centre ξ, intérieur aux cercles C_0 et C_1, et coïncidant, dans ce cercle, tant avec $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ qu'avec $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$. La proposition est démontrée.

53. Nous venons de voir qu'il existe une fonction $f(x)$ qui, pour tout point intérieur soit au cercle C_0, soit au cercle C_1, coïncide soit avec $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, soit avec $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$, soit avec les deux, si le point x est à la fois intérieur aux deux cercles.

Pour un point de la circonférence du cercle C_0 situé à l'intérieur du cercle C_1, on doit prendre pour définition de $f(x)$ la valeur que fournit la série $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$. A cause de la continuité, on voit que, si la série $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ se trouve être convergente en ce point, elle fournira la même détermination, comme il résulte du second théorème d'Abel, en supposant qu'on s'approche du point x en suivant le rayon du cercle C_0 qui y aboutit. Mais la série $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ peut n'être convergente en aucun point de l'axe considéré, et il *faut* alors recourir à la seconde série $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$.

Les points situés sur l'arc de cercle C_1, contenu à l'intérieur de C_0, donneraient lieu à des observations semblables.

Les arcs de chacun des cercles C_0, C_1, qui sont intérieurs à l'autre, peuvent être effacés, et, dans l'aire limitée par les arcs restants, aire que nous désignerons par le symbole

$$((C_0, C_1)),$$

on a défini une fonction univoque $f(x)$, jouissant des propriétés qui suivent : En chaque point a intérieur à l'aire considérée, la fonction est finie, continue, et admet des dérivées de tous les ordres; elle est développable en une série entière en $x-a$, convergente pourvu que la valeur absolue de $x-a$ soit suffisamment petite. (On exprime souvent l'ensemble de ces propriétés en disant que la fonction est *régulière* en a.)

On dit aussi que la série $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ est *continuée* dans le cercle C_1, hors du cercle C_0, par la série $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$.

54. Il est à peine utile de faire remarquer que, si la série

$$\mathfrak{P}_0(x-x_0)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

est continuée par la série

$$\mathfrak{P}_1(x-x_1)=b_0+b_1(x-x_1)+\ldots+b_n(x-x_1)^n+\ldots,$$

les séries

$$\mathfrak{P}'_0(x-x_0),\qquad \mathfrak{P}''_0(x-x_0),\qquad \ldots,$$

dérivées successives de la première, seront, de même, continuées par les séries

$$\mathfrak{P}'_1(x-x_1),\qquad \mathfrak{P}''_1(x-x_1),$$

dérivées successives de la seconde.

De même encore, si l'on pose

$$\mathfrak{Q}_0(x-x_0)=\frac{a_0}{1}(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\ldots,$$

$$\mathfrak{Q}_1(x-x_1)=\frac{b_0}{1}(x-x_1)+\frac{b_1}{2}(x-x_1)^2+\ldots+\frac{b_n}{n+1}(x-x_1)^{n+1}+\ldots,$$

la série $\mathfrak{Q}_0(x-x_0)$ sera continuée, dans le cercle C_1, par la série

$$\mathfrak{Q}_1(x-x_1)+\mathfrak{Q}_0(x_1-x_0),$$

qui, au point x_1, coïncide avec elle ainsi que ses dérivées. Dans le cas où le cercle C_1 contiendrait le point x_0, les deux séries qui se continuent devraient être égales pour $x=x_0$; on aurait alors

$$\mathfrak{Q}_1(x_0-x_1)=-\mathfrak{Q}_0(x_1-x_0).$$

55. On a supposé, dans ce qui précède, que les cercles C_0, C_1 étaient les cercles de convergence des deux séries $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$; mais il est évident que tous les raisonnements subsisteraient sans modification si l'on avait pris, à la place du cercle C_0, un cercle concentrique de rayon moindre; puis, après avoir déduit de la même façon la série $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ de la série $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, à la place du cercle C_1 un cercle concentrique plus petit.

Si l'on continue à supposer que les cercles C_0 et C_1 sont les cercles de convergence des deux séries $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$,

on peut faire une remarque intéressante relative aux rayons R_0 et R_1 de C_0 et C_1 :

Le cercle C_1 étant, au moins, intérieurement tangent au cercle C_0, on a

$$R_1 \geqq R_0 - |x_1 - x_0|.$$

On a, de même,

$$R_0 \gtreqqless R_1 - |x_1 - x_0|.$$

Cela est évident, si le cercle C_1 ne contient pas x_0 à son intérieur; dans le cas contraire, cette inégalité résulte de ce que l'on aurait pu déduire la série $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ de la série $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$, comme on a déduit $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ de $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$; on poserait

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_1(x - x_1) &= \mathfrak{P}_1(x_0 - x_1 + x - x_0)\\ &= \mathfrak{P}_1(x_0 - x_1) + \frac{\mathfrak{P}'_1(x_0 - x_1)}{1}(x - x_0) + \ldots\\ &\quad + \frac{\mathfrak{P}_1^{(n)}(x_0 - x_1)}{1.2\ldots n}(x - x_0)^n + \ldots,\end{aligned}$$

et la série qui figure dans le dernier membre serait identique, terme par terme, à $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, puisque les deux fonctions $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$, $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ doivent, pour $x = x_0$, être égales, ainsi que toutes leurs dérivées (¹).

56. Si l'on prend un point x_2 intérieur à l'aire $((C_0, C_1))$ et si l'on considère la série

$$\mathfrak{P}_2(x - x_2)$$

entière en $x - x_2$, qui représente en x_2 et aux environs immédiats la fonction $f(x)$, il peut arriver que le cercle de convergence de $\mathfrak{P}_2(x - x_2)$ dépasse l'aire $((C_0, C_1))$, ce qui permet alors d'étendre l'aire dans laquelle la fonction $f(x)$ est définie. Et l'on peut continuer ainsi. On concevra d'ailleurs plus facilement la possibilité de cette extension par les remarques que nous allons faire dans ce numéro et dans le suivant.

Considérons une portion (A) du plan, limitée par un ou plu-

(¹) Si l'on donne au point x_1 les diverses positions qu'il peut occuper dans le cercle C_0, à chaque position correspondra une valeur pour R_1. Il résulte de la remarque précédente que la limite supérieure de l'ensemble des valeurs de R_1 est $2R_0$. On démontre que la limite inférieure de cet ensemble est o, limite qui n'est d'ailleurs atteinte pour aucun point *intérieur* à C_0.

sieurs contours, mais d'ailleurs *connexe*, c'est-à-dire telle que l'on puisse toujours joindre deux points intérieurs à (A) par une ligne brisée située tout entière dans (A) et n'en rencontrant pas le contour.

Supposons qu'une fonction $f(x)$ soit définie pour tout point a appartenant à (A) ou à son contour, et soit telle qu'il existe une série $\mathfrak{P}_a(x-a)$, convergente pourvu que la valeur absolue de $x-a$ reste inférieure à un certain nombre positif fixe r, indépendant de a, aussi petit qu'on le voudra, et que cette série ait les mêmes valeurs que $f(x)$ dans le cercle de centre a et de rayon r (1). Nous dirons que la fonction $f(x)$ est *holomorphe* dans l'aire (A), et sur son contour.

Soit une seconde fonction $\varphi(x)$ aussi holomorphe dans l'aire (A) et sur son contour, le rayon de convergence des séries entières par lesquelles on peut l'exprimer aux environs de chaque point étant aussi au moins égal à r.

Si en un point a, intérieur à (A), les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont égales ainsi que toutes leurs dérivées, elles coïncident en tout point de l'aire (A).

Autour de ce point a, en effet, dans un cercle de rayon égal ou inférieur à r, les deux fonctions sont représentées par la même série entière en $x-a$; soit maintenant b un autre point intérieur à (A), on pourra relier les deux points a, b par une *chaîne de cercles*, tous de rayons inférieurs à r et tous intérieurs à l'aire (A). Dès lors, le raisonnement employé dans le numéro précédent pour

---

(1) Toutes les restrictions que nous faisons ici, comme le lecteur s'en convaincra sans peine, ne sont pas nécessaires; elles sont faites pour faciliter le raisonnement dans une théorie dont nous ne voulons exposer que les parties les plus essentielles.

Ainsi la fonction $f(x)$, définie dans l'aire $((C_0, C_1))$, dans le n° 53, ne satisferait aux conditions imposées que si l'on substituait aux cercles C_0, C_1 des cercles respectivement concentriques, mais de rayons moindres.

Ajoutons encore qu'en parlant de courbes qui servent de contour ou de lignes d'intégration, nous supposerons toujours que l'on a affaire à des lignes formées d'un nombre fini d'arcs de courbes simples, comme des portions de droites, d'arcs de cercles, etc., ou, plus généralement, d'arcs de courbes *analytiques*, c'est-à-dire telles, que les coordonnées rectangulaires d'un de leurs points puissent s'exprimer par des séries entières, à coefficients réels, par rapport à un paramètre réel t, lequel ne doit varier que dans les limites où ces séries sont absolument convergentes.

prouver que, au point ξ, les deux séries $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ avaient même valeur, ainsi que toutes leurs dérivées, subsiste évidemment; en allant de cercle en cercle, on voit que les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont représentées, dans chaque cercle, par la même série entière. On voit aussi d'ailleurs que ces deux fonctions doivent coïncider sur le contour de (A).

En particulier, si $\mathfrak{P}_a(x - a)$ est la série entière en $x - a$ qui représente la fonction $f(x)$ dans le cercle de rayon r et de centre a, l'égalité

$$f(x) = \mathfrak{P}_a(x - a)$$

devra subsister pour tous les points x qui sont à la fois situés à l'intérieur du cercle de convergence de la série et à l'intérieur de (A). Si l'on considère un cercle de centre a et situé tout entier à l'intérieur de (A), l'application évidemment légitime de la formule de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z - x}\,dz,$$

où l'intégrale est effectuée le long de la circonférence de ce cercle, dans le sens direct, montre que l'on a, pour tous les points x intérieurs à ce cercle,

$$\begin{aligned} f(x) = \int \frac{f(z)}{z - a}\,dz + (x - a)\int \frac{f(z)}{(z - a)^2}\,dz \\ + (x - a)^2 \int \frac{f(z)}{(z - a)^3}\,dz + \ldots. \end{aligned}$$

Le second membre n'est autre chose que la série $\mathfrak{P}_a(x - a)$ et l'on voit que le rayon du cercle de convergence de cette série est au moins égal à la plus courte distance du point a au contour de (A) [1]. Le rayon du cercle de convergence est même nécessairement un peu plus grand, en raison de l'hypothèse qui a été faite sur la façon dont la fonction $f(x)$ se comporte sur le contour de (A).

Si maintenant on part d'un point b intérieur à la fois à (A) et au cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}_a(x - a)$, et que l'on forme

---

[1] Cette dernière conclusion pourrait se déduire, en ne faisant intervenir que des propositions appartenant à la théorie même des séries, du théorème énoncé dans la note du n° 55.

la série

$$\mathfrak{P}_b(x-b) = \mathfrak{P}_a(b-a) + \frac{\mathfrak{P}'_a(b-a)}{1}(x-a) + \frac{\mathfrak{P}''_a(b-a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots,$$

on aura

$$\mathfrak{P}_b(x-b) = f(x)$$

pour tous les points x situés à la fois dans (A) et à l'intérieur du cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}_b(x-b)$, en sorte que, dans (A), la *continuation* de la fonction $\mathfrak{P}_a(x-a)$, effectuée comme il a été expliqué dans les nos 52 et 53, sera toujours fournie par la fonction $f(x)$.

Supposons enfin que l'aire (A) soit limitée par un *contour simple*. Alors, si l'on part du point a intérieur à (A) pour aboutir, en suivant une courbe γ dont tous les points appartiennent à (A), à un point x appartenant aussi à A, l'intégrale

$$\int_\gamma f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx$$

sera, comme il résulte du théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, indépendante de la courbe (γ); elle définira donc une fonction $F(x)$, univoque dans l'aire (A) et l'on sait, par la théorie de Cauchy, que cette fonction est holomorphe dans (A).

On arriverait assez facilement à la notion de cette fonction $F(x)$ en continuant dans l'aire (A) la série $\mathfrak{Q}_a(x-a)$ entière en $(x-a)$ qui a pour dérivée, dans le cercle de centre a et de rayon r, la série $\mathfrak{P}_a(x-a)$ et cela en suivant un procédé qui sera expliqué tout au long au n° 64; nous laisserons ce soin au lecteur.

57. Considérons maintenant deux portions du plan (A), (B) limitées chacune par un contour simple et deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ holomorphes chacune dans l'aire correspondante et sur son contour, au sens qui a été fixé dans le dernier numéro.

Supposons que les deux aires (A), (B) empiètent l'une sur l'autre et qu'en un point a intérieur à la fois à (A) et à (B), les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ soient égales ainsi que toutes leurs dérivées correspondantes. Alors il est clair, par le numéro précédent,

que les deux fonctions ne cesseront pas de coïncider, ainsi que toutes leurs dérivées dans toute la région (C) commune à la fois à (A) et à (B), et dont les différents points peuvent être reliés à a par une ligne brisée dont tous les points appartiennent à la fois à (A) et à (B).

Supposons d'abord que les deux aires (A) et (B) n'aient pas d'autres points communs que ceux qui appartiennent à la région (C) ainsi définie : on pourra effacer la partie du contour de (A) qui est dans (B), celle du contour de (B) qui est dans (A) et dans l'aire

$$((A, B)),$$

dont les points appartiennent soit à (A) soit à (B), on aura défini une fonction holomorphe $F(x)$, égale à $f(x)$, à $\varphi(x)$ ou aux deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, suivant que le point x est dans (A), dans (B), ou à la fois dans (A) et dans (B).

Mais, si les deux aires (A) et (B) ont une autre région commune (D) telle que l'on ne pût y pénétrer en partant de a et en restant *à la fois* dans les aires (A) et (B), rien, dans ce qui précède, n'autorise à dire que, dans cette région (D), les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ coïncident. Il pourra, suivant les circonstances, en être ou n'en être pas ainsi, et il faudra se garder, dans ce dernier cas, d'effacer les portions du contour de (A) ou de (B) qui limitent la région (D). On voit, sans que nous insistions davantage, comment s'introduit de cette façon, la notion de *coupure,* que nous supposons d'ailleurs familière au lecteur.

58. Donnons un exemple des méthodes et propositions qui précèdent. Partons de la série

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

dans laquelle le cercle de convergence C a évidemment l'unité pour rayon. En un point x intérieur à ce cercle, on a pour les dérivées successives

$$\mathfrak{L}'(x) = 1 - x + x^2 - \ldots = \frac{1}{1+x},$$

$$\mathfrak{L}''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{L}^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x)^n}$$

et par suite, x_1 étant un point intérieur à C,

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x) &= \mathfrak{P}(x_1) + \frac{x - x_1}{1 + x_1} - \frac{1}{2}\frac{(x - x_1)^2}{(1 + x_1)^2} + \frac{1}{3}\frac{(x - x_1)^3}{(1 + x_1)^3} - \ldots \\ &= \mathfrak{P}(x_1) + \mathfrak{P}\left(\frac{x - x_1}{1 + x_1}\right).\end{aligned}$$

On voit d'ailleurs que la série

$$\mathfrak{P}\left(\frac{x - x_1}{1 + x_1}\right),$$

entière en $x - x_1$, est convergente tant que l'on a

$$|x - x_1| < |1 + x_1|,$$

c'est-à-dire tant que le point x est situé à l'intérieur du cercle C_1, décrit du point x_1 comme centre et passant par le point -1. Ainsi le cercle de convergence de la série

$$\mathfrak{P}(x_1) + \mathfrak{P}\left(\frac{x - x_1}{1 + x_1}\right)$$

est généralement extérieur en partie au cercle C, et l'on a ainsi un premier moyen de continuer la fonction $\mathfrak{P}(x)$ en dehors du cercle C, moyen dont on pourra d'ailleurs poursuivre plus loin l'application.

D'autre part, si x' est un point quelconque extérieur ou intérieur au cercle C, mais dont toutefois l'affixe n'est pas réelle négative et plus petite que -1 (ou $= -1$), la série

$$\mathfrak{P}\left(\frac{x - x'}{1 + x'}\right) = \frac{x - x'}{1 + x'} - \frac{1}{2}\frac{(x - x')^2}{(1 + x')^2} + \frac{1}{3}\frac{(x - x')^3}{(1 + x')^3} - \ldots$$

entière en $x - x'$, est convergente tant que x vérifie la condition

$$|x - x'| < |1 + x'|,$$

c'est-à-dire tant que x est situé à l'intérieur du cercle C' décrit de x' comme centre et passant par le point -1; et comme la dérivée par rapport à x de $\mathfrak{P}\left(\frac{x - x'}{1 + x'}\right)$ est égale à

$$\frac{1}{1 + \dfrac{x - x'}{1 + x'}}\,\frac{1}{1 + x'} = \frac{1}{1 + x},$$

les fonctions

$$\mathfrak{P}(x), \quad \mathfrak{P}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)$$

ont en x toutes leurs dérivées égales; on en conclut que, en désignant par a une valeur de x vérifiant à la fois les conditions

$$|a|<1, \quad |a-x'|<|1+x'|,$$

les deux fonctions

$$\mathfrak{P}(x), \quad \mathfrak{P}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)-\mathfrak{P}\left(\frac{a-x'}{1+x'}\right)+\mathfrak{P}(a)$$

coïncident ainsi que leurs dérivées au point a. Elles coïncident, par conséquent, dans toute la région commune à deux cercles respectivement concentriques aux deux cercles C et C′ et de rayons un peu moindres; par suite enfin, en un point quelconque de la région commune aux deux cercles C, C′, laquelle contient le point a. Si l'on efface les portions des deux circonférences C, C′ dont chacune est intérieure au cercle dont elle ne fait pas partie, on a défini dans l'aire

$$((\mathrm{C}, \mathrm{C}'))$$

une fonction unique $f(x)$ holomorphe dans cette aire mais non sur le contour.

Si l'on avait pris comme point x' un point d'affixe réelle négative et plus petite que -1, il n'existerait pas de point a; c'est pourquoi nous avons exclu ces valeurs de x'.

Si l'on considère maintenant un autre point x'' tel que la circonférence C″ décrite du point x'' comme centre et passant par le point -1 n'ait aucun point commun autre que ce dernier point avec la région [C, C′], commune aux deux cercles C, C′, et, si l'on désigne par b un point intérieur à la fois aux deux cercles C, C″, on voit que les deux aires limitées par des contours simples, C″ et ((C, C′)), auront en général deux parties communes : l'une contient le point b; les points de l'autre ne peuvent être reliés au point b sans franchir le contour de l'une ou de l'autre des deux aires. Dans la première, les fonctions $f(x)$ et

$$\mathfrak{P}\left(\frac{x-x''}{1+x''}\right)-\mathfrak{P}\left(\frac{b-x''}{1+x''}\right)+\mathfrak{P}(b)$$

coïncident; rien n'autorise à dire qu'elles coïncident dans la seconde, et, en effet, elles n'y coïncident pas. Nous le savons, d'ailleurs, par les propriétés bien connues de la fonction non univoque $\log(1+x)$, et nous ne nous arrêterons pas à montrer comment le procédé précédent pourrait permettre de le reconnaître directement.

59. Il nous reste encore, pour terminer ce sujet, à expliquer ce qu'il faut entendre par *continuer le long d'une courbe* une fonction définie par une série $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, entière en x_0.

Supposons que les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ soient les centres respectifs des cercles $C_0, C_1, \ldots, C_n$ formant une *chaîne* (n° 52), c'est-à-dire tels que chacun de ces cercles contienne le centre du cercle suivant; supposons, en outre, que les séries

$$\mathfrak{P}_0(x-x_0),\quad \mathfrak{P}_1(x-x_1),\quad \ldots,\quad \mathfrak{P}_n(x-x_n)$$

soient respectivement convergentes dans ces cercles, et que chacune ait été déduite de la précédente par *continuation,* de sorte que l'on a, par exemple,

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_1(x-x_1) = \mathfrak{P}_0(x_0-x_1) + \frac{\mathfrak{P}'_0(x_0-x_1)}{1}(x-x_1) + \ldots \\ + \frac{\mathfrak{P}_0^{(n)}(x_0-x_1)}{1.2\ldots n}(x-x_1)^n + \ldots.\end{aligned}$$

Enfin, supposons les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ situés sur un arc de courbe (S), commençant au point x_0, finissant au point x_n et satisfaisant aux conditions suivantes :

A chaque valeur de l'arc s, compté à partir de x_0, correspond un point unique de la courbe. En se déplaçant sur la courbe de façon que l'arc s grandisse d'une manière continue, on rencontre successivement, et dans l'ordre indiqué, les points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, en décrivant successivement les arcs $x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n$, respectivement contenus à l'intérieur des cercles $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$. S'il arrive que deux de ces arcs se croisent, on regardera comme essentiellement distincts le point du premier et le point du second arc qui coïncident; ces deux points se distingueront par la valeur de l'arc s, qui n'est pas la même pour l'un et pour l'autre. Convenons encore, si ξ est un point quelconque de la

courbe (S) correspondant à la valeur σ de l'arc s, et si (γ) est un cercle décrit du point ξ comme centre, d'appeler arc de la courbe intérieur au cercle (γ) la portion de cette courbe que l'on décrit en faisant croître ou décroître s à partir de σ, jusqu'à ce qu'on rencontre la circonférence du cercle (γ); s'il y a d'autres points de la courbe intérieurs au cercle (γ), on n'en tiendra pas compte.

Ceci posé, nous définirons sans ambiguïté, pour tout point x de la courbe (S) correspondant à un arc s donné, une fonction $f(x)$, par cette condition que, si le point x appartient à l'arc $x_i x_{i+1}$, la valeur de $f(x)$ soit égale à celle de $\mathfrak{P}_i(x - x_i)$.

La fonction $f(x)$ jouit de la propriété suivante : Si l'on considère un quelconque ξ des points de (S) correspondant à la valeur σ de l'arc s, il existera un cercle (γ) de centre ξ, de rayon ρ indépendant de σ, et une série $\varpi(x - \xi)$ entière en $x - \xi$, telle que l'on ait

$$\varpi(x - \xi) = f(x)$$

pour tous les points de l'arc de la courbe (S) intérieur au cercle (γ). Il suffira, en effet, de prendre pour ρ un nombre inférieur à chacun des nombres $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$, où δ_i désigne la plus courte distance d'un point de l'arc $x_i x_{i+1}$ à la circonférence du cercle C_i, et, en supposant que ξ appartienne à ce dernier arc, de prendre pour la série $\varpi(x - \xi)$ la série qui se déduit de $\mathfrak{P}_i(x - x_i)$, en substituant $x - \xi + \xi - x_i$ à $x - x_i$, et en ordonnant suivant les puissances de $x - \xi$.

Toute fonction $f(x)$ jouissant de la propriété précédente est entièrement déterminée dès qu'on se donne la courbe (S) et le premier élément $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, ou, ce qui revient au même, les valeurs des dérivées successives de la fonction $f(x)$ au point x_0. On s'en convaincra sans peine par un raisonnement employé déjà plusieurs fois, en s'avançant successivement sur la courbe (S) à partir du point x_0, et en formant une chaîne de petits cercles de rayons égaux à ρ dont les centres soient sur (S), et se succèdent dans un ordre tel qu'on les rencontre successivement en marchant sur la courbe dans le sens des arcs croissants à partir du point x_0.

On voit, d'après cela, que si, pour continuer la fonction $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ jusqu'au point x_n, on avait pris sur la courbe (S) une autre suite de points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p, x_n$ *correspondant à des*

valeurs toujours croissantes de l'arc s, de manière à obtenir, toujours par le même procédé, une suite de séries entières en $x - x'_1$, $x - x'_2$, ..., $x - x'_p$, et enfin $x - x_n$,

$$\mathfrak{P}_0(x - x_0), \quad \mathrm{P}_1(x - x'_1), \quad \mathrm{P}_2(x - x'_2), \quad \ldots, \quad \mathrm{P}_p(x - x'_p), \quad \mathrm{P}_n(x - x_n),$$

la dernière série ne peut qu'être identique à la série $\mathfrak{P}_n(x - x_n)$, trouvée au moyen de la première suite de points. On a ainsi une idée très nette de ce qu'est la continuation d'une fonction, donnée par un premier élément $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, quand on suit une courbe déterminée, en supposant que cette continuation puisse se faire.

On conçoit d'ailleurs que, en suivant deux chemins différents pour aller du point x_0 au point x_n, on parvienne en ce point avec deux séries différentes, entières en $x - x_n$, quoiqu'on soit parti du même élément $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$.

Si la courbe (S) fait partie d'une aire (A) dans laquelle on ait défini (n° 56) une fonction $f(x)$ holomorphe dans (A) et sur le contour, et si l'on part de l'élément $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, qui coïncide au point x_0 et aux environs avec $f(x)$, il est clair que la fonction que l'on définira ainsi le long de la courbe (S) coïncidera toujours avec $f(x)$, et, dans ce cas, si l'on aboutit au même point x_n en suivant deux chemins différents, appartenant tous les deux entièrement à l'aire (A), on arrivera en x_n avec *la même* série $\mathfrak{P}_n(x - x_n)$.

60. Reportons-nous maintenant au commencement du n° 56, où, en partant d'un élément $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, nous avons cherché à continuer la fonction que définit cet élément dans le cercle de convergence.

Il peut se faire qu'on parvienne, par une série de continuations successives, à définir dans tout le plan, sauf certains points, certaines lignes, certaines régions, une fonction univoque et régulière partout, sauf pour les points, lignes et régions exclues. Quant aux lignes de discontinuité, elles peuvent être de diverses natures : les unes ne pouvant être traversées en aucune façon, comme dans l'exemple de la note du n° 51, tandis que les autres, qui séparent deux régions dans lesquelles la fonction est définie, pourraient être traversées sans obstacle par une ligne suivant laquelle on pourrait continuer la fonction par le procédé

du numéro précédent, en partant d'un élément relatif à un point de la première région, mais avec cette circonstance, que les séries que l'on trouverait ainsi, après avoir traversé la ligne de discontinuité, ne coïncideraient plus avec les séries qui définissent la fonction dans la deuxième région.

Nous ferons encore la remarque suivante : Soit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ une série entière en $\frac{1}{x}$, convergente tant que l'on a

$$|x| > \mathrm{A},$$

où A est un nombre positif. Désignons par $\mathcal{A}$ la région extérieure au cercle de rayon A décrit du point O comme centre. On observera d'abord que la série $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit une fonction de la variable x holomorphe dans toute aire limitée qui fait partie de $\mathcal{A}$ sans en atteindre la limite : cela résulte, si l'on veut, du théorème du n° 49 sur la composition des séries. Imaginons maintenant que, en partant par exemple d'un élément de fonction $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ et en appliquant le procédé de continuation, on parvienne à une série $\mathfrak{P}_\alpha(x - x_\alpha)$, pour laquelle x_α appartienne à $\mathcal{A}$ et telle que, pour tous les points du cercle de convergence de cette série situés dans $\mathcal{A}$, on ait

$$\mathfrak{P}_\alpha(x - x_\alpha) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right);$$

il est clair qu'on pourra alors appliquer la proposition du n° 57 et que, si l'on continue l'élément $\mathfrak{P}_\alpha(x - x_\alpha)$ en restant dans $\mathcal{A}$, par exemple au moyen d'une chaîne de cercles tous situés dans $\mathcal{A}$, on trouvera toujours des séries $\mathfrak{P}_\beta(x - x_\beta)$ pour lesquelles on aura

$$\mathfrak{P}_\beta(x - x_\beta) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

dans la région où les deux membres ont un sens, et l'on pourra regarder l'élément $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ lui-même comme fournissant la continuation de la fonction, dont la partie que l'on considère est dite alors régulière au point ∞.

M. Weierstrass entend par *fonction analytique* l'ensemble de

toutes les séries telles que

$$\mathfrak{P}_a(x - x_a), \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

que l'on peut déduire par continuation, soit d'une façon, soit d'une autre, d'un élément $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$. Nous avons déjà fait observer, et nous le répétons ici, que, dans cette expression *fonction analytique,* le mot fonction n'a nullement le sens que nous avons donné à ce mot dans ce Livre, et qui indique seulement une correspondance entre deux variables telle que l'une des variables, la variable indépendante, étant donnée, l'autre variable, la fonction, soit donnée. C'est ce dernier sens que nous conserverons toutes les fois que l'épithète analytique ne sera pas accolée au mot fonction.

Il résulte bien nettement de ce qui précède que l'ensemble des séries, qui constitue une fonction analytique, est déterminé quand on se donne une de ces séries; en d'autres termes, une fonction analytique est déterminée par l'un de ses éléments. Comme on peut continuer une fonction en revenant sur ses pas et passant de x_n à x_0, au lieu de passer de x_0 à x_n, on voit bien que la fonction analytique est déterminée par un *quelconque* de ses éléments.

V. — Application aux équations différentielles linéaires.

61. Le procédé de continuation d'une fonction donnée par un élément $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, c'est-à-dire, au fond, par la suite des coefficients d'une série entière en $x - x_0$, n'est guère applicable directement pour reconnaître les propriétés de la fonction qu'on engendre ainsi, en raison de la complication évidente des calculs quand on passe d'une série à une autre, et l'importance de ce procédé est surtout théorique. Il sert, par exemple, de base pour établir l'existence de fonctions définies par des équations différentielles.

Nous n'avons nullement l'intention d'exposer la théorie de ces fonctions. Nous nous bornerons, pour donner un exemple, à considérer les équations différentielles linéaires et à établir le théorème fondamental relatif à l'existence des solutions de ces équa-

tions [1], théorème qui nous sera utile plus tard : nous nous contenterons, d'ailleurs, uniquement pour éviter quelques longueurs d'écriture, d'examiner le cas d'une équation différentielle du second ordre. Les raisonnements qui suivent s'étendent, sans difficulté aucune, aux équations d'ordre supérieur.

Soit donc

$$y'' + py' + qy = 0$$

une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Supposons que p et q soient des fonctions de x développables en séries entières en $x - x_0$ absolument convergentes pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x - x_0| \leqq R.$$

Nous allons montrer que, en désignant par u_0 et u_1 deux nombres arbitraires, il existe une série de la forme

$$u_0 + u_1(x - x_0) + u_2(x - x_0)^2 + u_3(x - x_0)^3 + \ldots,$$

dans laquelle les coefficients $u_2, u_3, \ldots$ sont parfaitement déterminés, convergente pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition précédente (sauf, peut-être, celles pour lesquelles l'égalité a lieu), et qui, pour toutes ces valeurs, vérifie identiquement l'équation différentielle.

On voit d'abord, en faisant le changement de variable

$$x = x_0 + R\xi,$$

qui change l'équation proposée en une autre de même forme, que l'on peut se borner à examiner le cas où l'on a

$$x_0 = 0, \qquad R = 1.$$

Soient donc, dans cette hypothèse,

$$p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots,$$
$$q = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots;$$

---

[1] La théorie des équations différentielles linéaires, au point de vue des variables imaginaires, est due à M. Fuchs, qui l'a développée dans une série de Mémoires dont le premier se trouve dans le tome 66 du *Journal de Crelle*.

les séries à termes positifs

$$P = |p_0| + |p_1| + \ldots + |p_n| + \ldots,$$
$$Q = |q_0| + |q_1| + \ldots + |q_n| + \ldots$$

étant convergentes.

Cherchons à satisfaire identiquement à l'équation différentielle par une série de la forme

$$y = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots,$$

u_0, u_1 étant des nombres donnés. En prenant les dérivées première et seconde, puis substituant dans l'équation différentielle et écrivant qu'elle est identiquement vérifiée, il vient

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} 1.2\,u_2 + p_0 u_1 + q_0 u_0 = 0, \\ 2.3\,u_3 + 2\,u_2 p_0 + (p_1 + q_0) u_1 + q_1 u_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (n-1)n u_n + (n-1) p_0 u_{n-1} + [(n-2)p_1 + q_0]\, u_{n-2} \\ \quad + [(n-3)p_2 + q_1]\, u_{n-3} + \ldots + [p_{n-2} + q_{n-3}]\, u_1 + q_{n-2} u_0 = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ces équations, où l'on doit regarder u_0, u_1 comme des données, déterminent successivement et sans ambiguïté les coefficients u_2, u_3, ..., u_n, ..., et si la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots$$

ainsi formée est convergente, il est clair qu'elle vérifiera l'équation différentielle. Nous allons montrer qu'elle est absolument convergente pour l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x| < 1.$$

Soient, en effet, A et B des nombres positifs supérieurs ou égaux respectivement à P et à Q, et, par conséquent à $|p_n|$, $|q_n|$ pour toutes les valeurs de n; soient, en outre, v_0 et v_1 deux nombres positifs égaux ou supérieurs à $|u_0|$ et $|u_1|$. Considérons les équations

$$1.2\,v_2 = A v_1 + B v_0,$$

$$2.3\,v_3 = 2A v_2 + (A + B) v_1 + B v_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n-1)nv_n = (n-1)Av_{n-1} + [(n-2)A+B]\,v_{n-2}$$
$$+ [(n-3)A+B]\,v_{n-3} + \ldots + (A+B)\,v_1 + Bv_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

il est clair que, si l'on détermine les quantités $v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$ par ces formules, tous les nombres ainsi trouvés seront positifs et que l'on aura

$$v_n \geqq |u_n|;$$

or l'équation qui détermine v_n peut s'écrire

$$(n-1)nv_n = \quad A[(n-1)v_{n-1} + (n-2)v_{n-2} + \ldots + v_1]$$
$$+ B[v_{n-2} + v_{n-3} + \ldots + v_0];$$

en retranchant, membre à membre, de cette équation celle qu'on en déduit en changeant n en $n-1$, il vient

$$(n-1)nv_n = (n-1)[A+n-2]\,v_{n-1} + Bv_{n-2};$$

ainsi, il suffit de supposer $A > 2$, pour que v_n soit supérieur à v_{n-1}, quel que soit n, supposé toutefois plus grand que un. On a d'ailleurs

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} = \frac{n}{A+n-2} - \frac{B}{(n-1)(A+n-2)}\,\frac{v_{n-2}}{v_n};$$

le rapport $\frac{v_{n-2}}{v_n}$ étant inférieur à un, on voit que, lorsque n augmente indéfiniment, le premier membre a pour limite l'unité; par suite, si x' est un nombre positif plus petit que un, la série

$$v_0 + v_1x' + \ldots + v_nx'^n + \ldots$$

est convergente; la série

$$u_0 + u_1x + \ldots + u_nx^n + \ldots$$

est donc absolument convergente si la valeur absolue de x est moindre que un. Le théorème est démontré.

62. La valeur de u_n tirée des équations (I) est évidemment de la forme

$$u_n = \mathcal{A}_n u_0 + \mathcal{B}_n u_1,$$

où $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$ sont des fonctions des coefficients $p_0, p_1, \ldots, q_0,$

q_1, ... Si l'on suppose $u_1 = 0$, $u_0 = 1$, u_n se réduit à $\mathcal{A}_n$; de même il se réduit à $\mathcal{B}_n$ si $u_0 = 0$, $u_1 = 1$; il résulte par conséquent du théorème précédent que les séries

$$\mathcal{A}(x) = 1 + \mathcal{A}_2 x^2 + \mathcal{A}_3 x^3 + \ldots + \mathcal{A}_n x^n + \ldots$$
$$\mathcal{B}(x) = x + \mathcal{B}_2 x^2 + \mathcal{B}_3 x^3 + \ldots + \mathcal{B}_n x^n + \ldots$$

sont convergentes pour les valeurs de x qui vérifient la condition

$$|x| < 1,$$

et la forme générale des solutions de l'équation différentielle, qui peuvent être représentées par une série entière en x, sera

$$f(x) = u_0 \mathcal{A}(x) + u_1 \mathcal{B}(x),$$

où u_0, u_1 sont des constantes arbitraires égales aux valeurs pour $x = 0$ de $f(x)$ et de sa dérivée.

Le fait que les coefficients de la série $f(x)$ sont déterminés quand on se donne les deux premiers, n'est que la traduction de cette proposition évidente *a priori :* si une fonction est assujettie à vérifier l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0,$$

les valeurs de ses dérivées seconde, troisième, ... en un point sont déterminées quand on se donne les valeurs en ce point de cette fonction et de sa dérivée première; cela résulte pour la dérivée seconde de l'équation

$$y'' + py' + qy = 0$$

elle-même, pour la dérivée troisième de celle qu'on en déduirait en la différentiant, etc.

63. Supposons que les coefficients p, q de l'équation différentielle soient des polynomes entiers en x ou des fonctions transcendantes entières. Il existera une fonction satisfaisant à l'équation différentielle linéaire, prenant ainsi que sa dérivée au point $x = x_0$ des valeurs arbitraires u_0, u_1 et développable en une série entière en $x - x_0$, convergente dans un cercle de rayon arbitraire, c'est-à-dire dans tout le plan. La solution générale de l'équation différentielle sera une fonction transcendante entière.

64. Supposons que p et q soient des fractions rationnelles

$$p = \frac{\varphi(x)}{\theta(x)}, \qquad q = \frac{\psi(x)}{\theta(x)},$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$ étant des polynomes entiers n'ayant pas de facteur commun. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les racines distinctes de l'équation

$$\theta(x) = 0;$$

soit enfin x_0 un point du plan distinct des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Si R désigne un nombre positif moindre que tous les nombres

$$|x_0 - \alpha_1|, \qquad |x_0 - \alpha_2|, \qquad \ldots, \qquad |x_0 - \alpha_p|,$$

les fonctions p et q pourront être développées en séries entières en $x - x_0$, absolument convergentes pour les valeurs de x qui vérifient la condition

$$|x - x_0| < R;$$

il existera donc une fonction $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ vérifiant l'équation différentielle, prenant pour $x = x_0$, ainsi que sa dérivée, des valeurs arbitrairement choisies λ_0, μ_0, et convergente pour les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x - x_0| < R.$$

Ceci posé, imaginons une courbe (S) partant du point x_0, ne passant par aucun des points $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Il est aisé de voir qu'on pourra continuer la fonction $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ tout le long de cette courbe. Soit, en effet, δ un nombre plus petit que les plus courtes distances des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ à la courbe (S); considérons une chaîne de cercles $C_0, C_1, \ldots, C_n$ ayant respectivement leurs centres aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la courbe (S), et rencontrés successivement par un mobile qui partirait du point x_0 et décrirait la courbe dans le sens des arcs croissants (n° 59). Dans le cercle C_0 la série $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ vérifie l'équation différentielle; cette fonction prend, avec sa dérivée, au point x_1 intérieur à C_0, les valeurs λ_1, μ_1; soit $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ la série entière en $x - x_1$ qui vérifie l'équation différentielle et dont les deux premiers coefficients sont λ_1 et μ_1; au point x_1, les séries $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ et

$\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ coïncident ainsi que toutes leurs dérivées; $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ ne diffère donc pas de la série obtenue en remplaçant, dans $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $x-x_0$ par

$$x_1 - x_0 + x - x_1$$

et développant suivant les puissances entières de $x-x_1$. On continuera ainsi de proche en proche, et l'on arrivera en x_n avec une série déterminée $\mathfrak{P}_n(x-x_n)$, qui peut être regardée comme déduite de $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ par le procédé de continuation, en cheminant le long de la courbe (S) (nº 59). Cette série, qui vérifie l'équation différentielle, dépend uniquement des nombres λ_0, μ_0 et du chemin (S) parcouru pour arriver au point x_n.

Si l'on considère une aire (A), limitée par un contour simple, ne contenant ni à son intérieur ni sur sa circonférence aucun des points $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, il existera une fonction $f(x)$ holomorphe dans toute cette aire, vérifiant l'équation différentielle et entièrement déterminée si l'on se donne sa valeur et celle de sa dérivée en un point x_0 de (A).

Supposons, en effet, pour simplifier, que le contour qui limite l'aire considérée ne soit rencontré qu'en deux points par toute droite parallèle à une direction convenable, et soit δ un nombre moindre que la plus courte des plus courtes distances des points $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ au contour de (A). On pourra décomposer (A) en bandes par des parallèles équidistantes, la distance de deux parallèles étant $\frac{\delta}{2}$; on pourra décomposer ces bandes en carrés, dont les extrêmes pourront être incomplets. L'un de ces carrés contiendra le point x_0, pour lequel la fonction et sa dérivée doivent être égales respectivement à λ_0, μ_0; on formera la solution correspondante $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, qui conviendra évidemment dans tout le carré; $f(x)$ sera définie dans tout le carré comme devant être égale à $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$. Dans un des carrés contigus appartenant à la même bande, se trouve un point x_1, situé aussi dans le cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, dont le rayon est supérieur à δ; soient λ_1 et μ_1 les valeurs de $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ et de sa dérivée, pour $x=x_1$; on formera la solution correspondante $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ et l'on adoptera, pour valeurs de $f(x)$ dans le second carré, celles de $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$. Ces valeurs *continueront* celles qui ont été définies

dans le premier carré. On passera ensuite au carré suivant de la même bande, etc.; on parviendra ainsi à définir la fonction dans toute la bande.

On la définira de même dans la bande contiguë en partant d'un point x'_0, situé dans le cercle de convergence d'une des séries précédentes; tous ces cercles, en effet, empiètent évidemment sur la seconde bande. Les valeurs de la fonction dans la seconde bande *continuent* celles qui ont été définies dans la première bande, puisque, au point x'_0, la fonction définie dans la première bande et celle définie dans la seconde bande sont égales, ainsi que toutes leurs dérivées. On peut donc effacer la ligne qui sépare les deux bandes, puis continuer ainsi de bande en bande d'un côté et de l'autre, jusqu'à remplir l'aire (A) tout entière.

Si l'on a maintenant une autre aire (B) de même nature que (A), ayant un point ξ commun avec (A) et n'empiétant sur (A) qu'en des points qu'on peut relier à ξ, sans sortir ni de (A) ni de (B), on pourra de la même façon, en partant de ce point, remplir l'aire (B) tout entière, puis effacer la ligne de séparation entre (A) et (B), et ainsi de suite. On voit de cette façon qu'on pourra définir, sans ambiguïté, une fonction satisfaisant à l'équation différentielle, holomorphe dans toute aire limitée par un contour simple ne contenant aucun des points *critiques* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, pourvu qu'on se donne en un point x_0 de cette aire la valeur de la fonction et de sa dérivée. Si x_0, x_n sont deux points de cette aire, si on les relie par une courbe dont tous les points appartiennent à l'aire considérée, et que l'on continue la solution $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ relative au point x_0 le long de cette courbe, comme il a été expliqué précédemment, la solution $\mathfrak{P}_n(x - x_n)$, avec laquelle on parviendra ainsi au point x_n, sera évidemment indépendante du chemin parcouru (n° 59).

Mais il en serait autrement si les deux chemins partant de x_0 et aboutissant en x_n contenaient dans l'aire plane qu'ils limitent un des points critiques $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Si l'on relie tous ces points par une ligne brisée, dont tous ces points seraient les sommets, s'étendant ensuite indéfiniment à partir du dernier point et telle que chacun de ses éléments ne soit traversé par aucun autre, puis, que l'on pratique une coupure dans le plan le long de cette ligne, on voit, par ce qui précède, qu'il existera une fonction $f(x)$

holomorphe dans tout le plan coupé, satisfaisant à l'équation différentielle, et entièrement déterminée quand on se donne sa valeur et celle de sa dérivée pour un point du plan coupé.

Ces considérations s'étendent sans peine à des équations différentielles linéaires plus générales que celle que nous venons de considérer, et l'on trouve ainsi, sans rencontrer de difficulté nouvelle, que, si les coefficients p, q sont holomorphes dans une aire (A) limitée par un contour simple, il existera encore dans cette aire une fonction holomorphe, vérifiant l'équation différentielle, entièrement déterminée par sa valeur en un point de l'aire et celle de sa dérivée.

CHAPITRE III.

FONCTIONS TRANSCENDANTES ENTIÈRES.

I. — Fonctions exponentielles et circulaires.

65. Abandonnant maintenant ces considérations générales, nous allons établir quelques résultats fondamentaux dus pour une bonne partie à Euler et relatifs aux fonctions exponentielles et circulaires ([1]).

On sait que la série

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

est absolument convergente dans tout le plan : elle définit une fonction transcendante entière. Nous allons montrer que sa somme est la limite vers laquelle tend

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

quand m augmente indéfiniment par des valeurs entières et positives.

Supposons d'abord x réel et positif. La relation

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{1.2\ldots p} + \ldots,$$

([1]) Les nos 65, 67, 68 ont été rédigés d'après des Leçons faites à l'École Normale par M. Darboux vers 1880.

dans le second membre de laquelle les coefficients de x^0, x^1, x^2, ..., x^m sont tous positifs, montre que, lorsque m augmente, $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ augmente, puisqu'il en est ainsi de chaque terme du second membre et que d'ailleurs le nombre de ces termes augmente. D'ailleurs ces termes sont toujours inférieurs aux termes correspondants de la série $\varphi(x)$, donc $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ reste toujours inférieur à la somme de cette série; $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a donc une limite quand m augmente indéfiniment, et cette limite est au plus égale à la somme de la série $\varphi(x)$. D'un autre côté, cette limite est au moins égale à la limite de la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, c'est-à-dire à

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^p}{1.2\ldots p}$$

et cela quel que soit p. On voit donc que la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ est égale à $\varphi(x)$.

Supposons maintenant x imaginaire. Si l'on ordonne, suivant les puissances de x, la différence

$$\varphi(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m,$$

on obtiendra une série dont tous les coefficients sont réels et positifs et dont la somme ne peut donc qu'augmenter quand on remplace x par $|x|$. On a ainsi

$$\left|\varphi(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right| \leqq \varphi(|x|)-\left(1+\frac{|x|}{m}\right)^m;$$

mais le second membre de cette inégalité tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. Il en est donc de même du premier.

On représente la fonction $\varphi(x)$ définie pour toutes les valeurs de x par le symbole e^x; e^1 ou e n'est d'après cela autre chose que la somme de la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

L'application du théorème de la multiplication des séries montre

immédiatement que l'on a

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

et, de cette égalité étendue à un nombre quelconque de facteurs, on déduit sans peine que, quand x est entier positif, e^x n'est autre chose que le produit de x facteurs égaux à e, en sorte que l'emploi de ce symbole n'implique aucune contradiction.

66. En remplaçant dans l'égalité

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

x par ix et, en posant

$$\psi(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\chi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

il vient

$$e^{ix} = \psi(x) + i\chi(x);$$

de même

$$e^{-ix} = \psi(x) - i\chi(x).$$

Lorsque x est réel, les séries $\psi(x)$, $\chi(x)$ représentent, comme on sait, les fonctions $\cos x$, $\sin x$, introduites en Trigonométrie. On pourrait même, si ces dernières fonctions n'avaient pas été introduites antérieurement, prendre ces séries comme définitions de $\cos x$ et $\sin x$; le nombre π apparaît alors comme étant le double de la plus petite racine positive de l'équation $\psi(x) = 0$ ([1]). On a alors, par définition, pour toute valeur de x réelle ou imaginaire,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

on en déduira sans peine que les propriétés établies en Trigono-

---

([1]) *Voir* l'*Introduction à la théorie des fonctions*, de M. Jules Tannery, p. 114, n° 97.

métrie (formule d'addition, périodicité, etc.) s'étendent facilement aux fonctions $\sin x$, $\cos x$, ainsi définies; nous ne nous y arrêterons pas.

Nous emploierons encore les notations

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \sin ix = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Toutes ces fonctions admettent des dérivées dont la formation est bien connue et se déduit d'ailleurs de la considération des séries précédentes.

Enfin, si l'on pose

$$e^y = x$$

et si l'on pratique, dans le plan des x, une coupure allant du point o à l'infini en suivant l'axe des quantités négatives, il existe une infinité de fonctions de x, holomorphes dans le plan coupé, qui vérifient l'équation précédente quand on les met à la place de y. Pour l'une d'elles, la valeur absolue de la partie imaginaire reste, quel que soit x, inférieure à π; c'est la détermination *principale* de $\log x$. Toutes les autres solutions de l'équation précédente s'obtiennent en ajoutant à celle-là un multiple entier de $2\pi i$; l'une quelconque d'entre elles vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Ces résultats, que l'on obtient d'ailleurs sans aucune difficulté, sont trop connus pour que nous nous arrêtions à les développer à nouveau.

67. Si l'on pose

$$\theta(m) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m\right],$$

m étant un entier positif que, pour la commodité de ce qui va suivre, nous supposerons toujours impair, on a, par l'une des définitions précédentes,

$$\operatorname{sh}(x) = \lim_{m=\infty} . \theta(m).$$

Les racines de l'équation en x

$$\theta(m) = 0$$

sont données par la formule

$$\frac{1+\dfrac{x}{m}}{1-\dfrac{x}{m}} = e^{\frac{2k\pi i}{m}},$$

k étant un entier quelconque. On tire de là

$$\frac{x}{m} = \frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{-\frac{k\pi i}{m}}}{e^{\frac{k\pi i}{m}} + e^{-\frac{k\pi i}{m}}} = i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}.$$

On aura toutes les valeurs de x en donnant à k les valeurs

$$-\frac{m-1}{2}, \quad -\frac{m-1}{2}+1, \quad \ldots, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \frac{m-1}{2};$$

k étant supposé égal à l'un de ces nombres, nous ferons

$$x_k = m \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m},$$

d'où l'on voit, puisque $\frac{k\pi}{m}$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, que la valeur absolue du nombre réel x_k est supérieure à celle de $k\pi$.

Les racines du polynome $\theta(m)$ n'étant autres que les nombres ix_k et le coefficient de x, dans ce polynome développé, étant égal à un, on a

$$\theta(m) = x\left(1+\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{x_2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{x_{\frac{m-1}{2}}^2}\right).$$

Soit p un entier positif fixe et posons

$$\theta_1(m) = x\left(1+\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{x_2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{x_p^2}\right),$$

$$\theta_2(m) = \left(1+\frac{x^2}{x_{p+1}^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{x_{p+2}^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{x_{\frac{m-1}{2}}^2}\right);$$

on aura

$$\theta(m) = \theta_1(m)\,\theta_2(m);$$

nous allons chercher ce que deviennent les deux facteurs du second membre quand m augmente indéfiniment.

k étant fixe et m augmentant indéfiniment, $x_k = m \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}$ tend évidemment vers $k\pi$; on a donc

$$\lim_{m=\infty} \theta_1(m) = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{p^2\pi^2}\right)$$

et il est clair que $\theta_2(m) = \dfrac{\theta(m)}{\theta_1(m)}$ admet aussi une limite, pour m infini, puisque $\theta(m)$ et $\theta_1(m)$ en admettent une. Il est aisé de trouver un nombre supérieur à la valeur absolue de cette limite : si l'on ordonne suivant les puissances de x le polynome

$$\theta_2(m) - 1,$$

les coefficients de ces puissances sont réels et positifs; la valeur absolue de ce polynome est donc au plus égale au nombre positif que l'on obtient en y remplaçant x par $|x|$; en d'autres termes, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\left(1+\frac{x^2}{x_{p+1}^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{x_{p+2}^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{x_{\frac{m-1}{2}}^2}\right)-1\right| \\
&\quad < \left(1+\frac{|x|^2}{x_{p+1}^2}\right)\left(1+\frac{|x|^2}{x_{p+2}^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|x|^2}{x_{\frac{m-1}{2}}^2}\right)-1 \\
&\quad < \left(1+\frac{|x|^2}{(p+1)^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{|x|^2}{(p+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left[1+\frac{|x|^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right]-1,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de ce que $|x_k|$ est plus grand que $|k\pi|$.

Mais en raison de la convergence du produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{|x|^2}{n^2\pi^2}\right),$$

qui résulte elle-même de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{|x|^2}{n^2\pi^2} = \frac{|x|^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2},$$

il est clair que, si l'on se donne un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un entier positif r tel que,

sous la condition $p > r$, le dernier membre des inégalités précédentes soit moindre que ε. On a donc, sous cette condition,

$$|\theta_2(m) - 1| < \varepsilon$$

et, par suite, aussi

$$\left|\lim_{m=\infty} .\theta_2(m) - 1\right| \leqq \varepsilon.$$

On peut donc écrire, en désignant par ε' une quantité imaginaire dont la valeur absolue est au plus égale à ε,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= \lim_{m=\infty} .\theta(m) = \lim_{m=\infty} .\theta_1(m) \lim_{m=\infty} .\theta_2(m) \\
&= x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x^2}{p^2\pi^2}\right)(1 + \varepsilon').
\end{aligned}$$

On en conclut que $\operatorname{sh} x$ est égal au produit infini convergent

$$x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

en d'autres termes, on a

$$\operatorname{sh} x = x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

$\operatorname{ch} x$ pourrait s'obtenir par une analyse semblable; mais il est plus simple de se servir de la formule

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2\operatorname{sh} x};$$

le numérateur et le dénominateur peuvent être mis sous forme de produits infinis et, en supprimant les facteurs communs, on trouve

$$\operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1 + \frac{x^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right].$$

Ces formules, quand on y remplace x par ix, deviennent

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1 - \frac{x^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right].$$

Ces belles formules, dues à Euler, mettent en évidence les valeurs de x pour lesquelles $\sin x$ et $\cos x$ s'annulent.

M. Hermite a fait observer [1] que, si l'on y regarde les seconds membres comme définissant des fonctions dont on ignorerait les propriétés, elles permettraient de mettre en évidence, de la façon la plus simple, la périodicité de ces fonctions, et il a profité de cette remarque pour en déduire un moyen de construire *a priori* des fonctions doublement périodiques.

Observons encore que, en raison de la convergence des séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|x^2|}{n^2\pi^2}, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|x^2|}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2},$$

les produits infinis qui figurent dans les seconds membres de nos formules satisfont aux conditions imposées dans le n° 41 ; on en conclut la possibilité de développer ces produits infinis en séries entières en x, convergentes dans tout le plan. En identifiant ces séries avec celles qui donnent $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x$, on parvient à une suite d'identités que nous nous contenterons de signaler ; nous retrouverons plus tard, sous une forme plus simple, des identités équivalentes.

En prenant les dérivées logarithmiques (n° 48) de ces produits infinis, on obtient les développements en séries

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - x^2}.$$

Ces formules, obtenues aussi par Euler, prêtent à des observations analogues à celles dont les produits infinis viennent d'être l'objet.

Elles sont d'ailleurs contenues dans des formules plus générales dues à Cauchy et qui peuvent s'établir par une analyse élémen-

(1) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* p. 42.

taire, analogue à celle qui nous a conduits aux expressions de $\sin x$ ou de $\cos x$, et que nous allons résumer très rapidement.

68. Soit λ un nombre réel positif, au plus égal à un, l'expression

$$\frac{\cos \lambda x}{\sin x},$$

où x est un nombre quelconque, est la limite, pour m infini, de l'expression

$$\varphi(m) = i\,\frac{\left(1+\dfrac{\lambda x i}{m}\right)^m + \left(1-\dfrac{\lambda x i}{m}\right)^m}{\left(1+\dfrac{x i}{m}\right)^m - \left(1-\dfrac{x i}{m}\right)^m},$$

où nous supposerons encore que m doit croître par valeurs entières, positives, impaires.

En décomposant $\varphi(m)$ en fractions simples, on trouve

$$\varphi(m) = \frac{1}{x} + \sum_{(k)} \frac{B_k}{x - x_k},$$

en posant

$$x_k = m \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m},$$

$$B_k = \frac{\left(1+\dfrac{\lambda i x_k}{m}\right)^m + \left(1-\dfrac{\lambda i x_k}{m}\right)^m}{\left(1+\dfrac{i x_k}{m}\right)^{m-1} + \left(1-\dfrac{i x_k}{m}\right)^{m-1}}$$

$$\left(k = -\frac{m-1}{2},\ -\frac{m-1}{2}+1,\ \ldots,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ \frac{m-1}{2}\right).$$

Comme $B_{-k} = B_k$, on peut écrire

$$\varphi(m) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=\frac{m-1}{2}} \frac{2 B_k x}{x^2 - x_k^2}.$$

Si l'on fait

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \lambda \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m},$$

on peut supposer α_k positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, et l'on trouve

$$B_k = (-1)^k \left(\frac{\cos \dfrac{k\pi}{m}}{\cos \alpha_k}\right)^m \frac{\cos m\alpha_k}{\cos^2 \dfrac{k\pi}{m}};$$

puis, k étant supposé fixe,

$$\lim_{m=\infty} B_k = (-1)^k \cos\lambda k\pi.$$

Ceci posé, en désignant par p un entier fixe, soient

$$\varphi_1(m) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{2B_k x}{x^2 - x_k^2},$$

$$\varphi_2(m) = \sum_{k=p+1}^{k=\frac{m-1}{2}} \frac{2B_k x}{x^2 - x_k^2};$$

on aura

$$\varphi(m) = \varphi_1(m) + \varphi_2(m).$$

Pour m infini, $\varphi(m)$ et $\varphi_1(m)$ ont des limites, on en conclut qu'il en est de même de $\varphi_2(m)$, et l'on reconnaît aisément que l'on peut supposer p assez grand pour qu'on puisse écrire l'inégalité

$$|\varphi_2(m)| < \sum_{k=p+1}^{k=\frac{m-1}{2}} \frac{2|x|}{\mu^2(k^2\pi^2 - |x|^2)},$$

μ étant un nombre fixe plus petit que 1 ; il résulte de là que, en désignant par ε' un nombre imaginaire qui tend vers zéro quand p augmente indéfiniment, on peut écrire

$$\lim_{m=\infty} \varphi_2(m) = \varepsilon',$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\cos\lambda x}{\sin x} = \lim_{m=\infty} \varphi(m) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{(-1)^k \cos\lambda k\pi}{x^2 - k^2\pi^2} x + \varepsilon'$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^k 2\cos\lambda k\pi}{x^2 - k^2\pi^2} x$$

$$= \lim_{m=\infty} \sum_{k=-m}^{k=m} \frac{(-1)^k \cos\lambda k\pi}{x - k\pi}.$$

On peut obtenir $\dfrac{\sin\lambda x}{\sin x}$ par une analyse semblable ou le déduire

de la relation

$$\frac{\sin\lambda x}{\sin x} = \frac{1}{\sin\lambda\pi}\left[\cos\lambda\pi\,\frac{\cos\lambda x}{\sin x} + \frac{\cos\lambda(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}\right],$$

d'où

$$\frac{\sin\lambda x}{\sin x} = \sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}\frac{2k\pi\sin\lambda k\pi}{x^2-k^2\pi^2} = \lim_{n=\infty}\sum_{k=-n}^{k=+n}(-1)^k\frac{\sin\lambda k\pi}{x-k\pi}.$$

De même

$$\frac{\cos\lambda x}{\cos x} = \sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)\pi\cos(2k-1)\frac{\lambda\pi}{2}}{x^2-(2k-1)^2\frac{\pi^2}{4}}$$

$$= \lim_{n=\infty}\sum_{k=-n}^{k=+n}(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\frac{\lambda\pi}{2}}{x-(2k-1)\frac{\pi}{2}}$$

et

$$\frac{\sin\lambda x}{\cos x} = \sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)\frac{\lambda\pi}{2}\,\frac{2x}{x^2-(2k-1)^2\frac{\pi^2}{4}}$$

$$= \lim_{n=\infty}\sum_{k=-n}^{k=+n}(-1)^{k-1}\frac{\sin(2k-1)\frac{\lambda\pi}{2}}{x-(2k-1)\frac{\pi}{2}}.$$

Le changement de x en ix fournira des expressions analogues pour les fonctions

$$\frac{e^{\lambda x}\pm e^{-\lambda x}}{e^x\pm e^{-x}}.$$

Si l'on remplace, dans les formules précédentes, λ par $-\lambda$, ces formules subsistent ; on peut donc les considérer comme établies pour tout nombre réel λ compris entre -1 et $+1$.

En ajoutant à la série qui représente $\frac{\cos\lambda x}{\sin x}$ le produit de i par la série qui représente $\frac{\sin\lambda x}{\sin x}$, on a la relation

$$\frac{e^{\lambda x i}}{\sin x} = \lim_{n=\infty}\sum_{k=-n}^{k=+n}(-1)^k\frac{e^{\lambda k\pi i}}{x-k\pi},$$

que l'on peut écrire, en posant $x = \pi z$ et $\lambda + 1 = 2\theta$,

$$2\pi i \frac{e^{2\theta z\pi i}}{e^{2z\pi i} - 1} = \lim_{n = \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{e^{2\theta k\pi i}}{z - k};$$

cette relation est établie pour tout nombre réel positif θ plus petit que l'unité, et pour tout nombre non entier z.

69. Si, dans l'expression qu'on vient d'obtenir pour $\frac{\cos\lambda x}{\sin x}$, on fait $\lambda = 1$, on retrouve la formule

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2},$$

qui donne lieu aux observations suivantes :

Supposons, en désignant par a un nombre positif plus petit que π, que l'on ait

$$|x| \leq a;$$

la quantité

$$\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2} = -\frac{2x}{k^2\pi^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2}$$

est alors développable en une série convergente entière en x, savoir

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left[-\frac{2x^{2n+1}}{(k\pi)^{2n+2}} \right].$$

Cette série reste convergente quand on y remplace tous les coefficients par leurs valeurs absolues et x par a; sa somme est alors égale à

$$\frac{2a}{k^2\pi^2 - a^2}.$$

D'ailleurs, la série à termes positifs

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2a}{k^2\pi^2 - a^2}$$

est convergente. La série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$$

se trouve donc dans le cas du n° 38, et il en résulte que la quantité $\cot x - \frac{1}{x}$ peut être développée en une série entière en x, comme il suit.

Posons, en général, r étant un entier plus grand que un,

$$S_r = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^r};$$

on aura, sous la condition $|x| < \pi$,

$$\frac{1}{x} - \cot x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2\,S_{2n+2}}{\pi^{2n+2}} x^{2n+1}.$$

Posons aussi

$$B_n = \frac{1.2.3\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n};$$

il viendra

$$\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{B_{n+1}(2x)^{2n}}{1.2.3\ldots 2n+2}.$$

Les nombres positifs B_n sont ce que l'on appelle les *nombres de Bernoulli*. Il est bien remarquable que ces nombres, qui jouissent d'ailleurs de propriétés arithmétiques très intéressantes, soient tous rationnels : ce fait résulte de l'égalité même qui précède, en y remplaçant $\cot x$ par $\frac{\cos x}{\sin x}$, multipliant par $4x^2 \sin x$, substituant à $\cos x$ et $\sin x$ leurs développements en séries, effectuant dans le second membre les multiplications de séries et égalant les coefficients d'une même puissance de x ; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} B_{n+1} &- \frac{(2n+2)(2n+1)}{1.2.3}\frac{B_n}{4} + \ldots \\ &+ (-1)^p \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(2n-2p+3)}{1.2.3\ldots(2p+1)}\frac{B_{n-p+1}}{4^p} + \ldots \\ &+ (-1)^n \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots 3}{1.2\ldots(2n+1)}\frac{B_1}{4^n} - (-1)^n \frac{2n+2}{2n+3}\frac{1}{4^{n+1}} = 0, \end{aligned}$$

d'où successivement

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}, \qquad B_3 = \frac{1}{42}, \qquad B_4 = \frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{5}{66}, \qquad B_6 = \frac{691}{2730}, \qquad B_7 = \frac{7}{6}, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

L'emploi des formules

$$\operatorname{tg} x = \cot x - \cot 2x,$$

$$\frac{1}{\sin x} = \cot\frac{x}{2} - \cot x$$

permet de trouver des développements analogues pour $\operatorname{tg} x$ et $\frac{1}{\sin x}$.

II. — Théorèmes de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler.

70. Les expressions si remarquables qui donnent $\sin x$, $\cos x$, sous forme de produits infinis, $\cot x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\sin x}$ sous forme de séries dont les termes sont des fractions rationnelles, peuvent être rattachées à des types très généraux, découverts par M. Weierstrass et par M. Mittag-Leffler, et qui conviennent l'un aux fonctions transcendantes entières comme $\sin x$, l'autre aux fonctions univoques dans tout le plan comme $\operatorname{tg} x$.

L'objet du théorème de M. Weierstrass est de trouver l'expression la plus générale d'une fonction transcendante entière dont on donne les zéros (¹).

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Soit n un entier positif; l'expression

$$\varphi(x) = (1 - x)e^{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}}$$

peut être mise sous la forme d'une série

$$1 + \alpha x^n + \alpha_1 x^{n+1} + \alpha_2 x^{n+2} + \ldots + \alpha_k x^{n+k} + \ldots$$

(¹) C'est-à-dire les valeurs de la variable qui annulent la fonction. Comparez n° 44.

convergente quel que soit x et dans laquelle tous les coefficients $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ sont réels et plus petits que 1 en valeur absolue.

Que l'expression $\varphi(x)$ puisse être développée en une série entière en x, toujours convergente, cela résulte immédiatement du n° 49. On a d'ailleurs, en supposant $|x| < 1$,

$$\varphi(x) = (1 - x)e^{\log\frac{1}{1-x}} e^{-\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \ldots}$$
$$= e^{-\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \ldots};$$

en remplaçant, dans le développement

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots,$$

y par

$$-\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \ldots,$$

on voit de suite que le développement de $\varphi(x)$ a la forme indiquée plus haut. Il reste à prouver que l'on a

$$|\alpha_n| < 1.$$

Or, si l'on fait

$$e^{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}} = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots,$$

on pourra obtenir les coefficients β en remplaçant, dans le développement de e^y, y par

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1},$$

et l'on voit déjà ainsi qu'ils sont positifs. Il est clair aussi que si l'on remplace y par la série indéfinie

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots,$$

on obtiendra un développement analogue, mais avec des coefficients plus grands; or ce développement ne sera autre chose que celui de

$$e^{\log\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots;$$

on a donc

$$\beta_m \leq 1. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (1 - x)(1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots) \\ &= 1 + (\beta_1 - 1)x + (\beta_2 - \beta_1)x^2 + \ldots + (\beta_n - \beta_{n-1})x^n + \ldots,\end{aligned}$$

d'où l'on conclut que les coefficients des diverses puissances de x sont au plus égaux à l'unité, en valeur absolue. Ce que nous voulions établir.

Il résulte de là que si, dans la série

$$\alpha x^n + \alpha_1 x^{n+1} + \ldots + \alpha_k x^{n+k} + \ldots,$$

on remplace x par un nombre positif ξ plus petit que 1, et les coefficients $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ par leurs valeurs absolues, la somme de la série ainsi obtenue sera moindre que

$$\frac{\xi^n}{1 - \xi}.$$

71. Voici maintenant le théorème qui est notre objet principal (¹).

Soit

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

une suite de nombres assujettis à cette condition que $|a_n|$ augmente indéfiniment avec n, et dont en outre aucun ne soit nul. On peut construire une fonction transcendante *entière* de x qui s'annule pour les valeurs de la suite précédente et seulement pour ces valeurs. En outre, si, dans la suite, il y a p nombres égaux à a_n, et pas davantage, a_n sera un zéro d'ordre p de cette fonction.

On peut, en effet, faire correspondre à chaque indice ν un entier positif m_ν tel que la série à termes positifs

$$\left|\frac{x}{a_1}\right|^{m_1} + \left|\frac{x}{a_2}\right|^{m_2} + \ldots + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu} + \ldots$$

soit convergente, quel que soit x. Il suffira, par exemple, de prendre $m_\nu = \nu$: la racine $\nu^{\text{ième}}$ du $\nu^{\text{ième}}$ terme de la série précédente aura

(¹) Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 16.

alors manifestement zéro pour limite quand ν augmentera indéfiniment.

Cette correspondance établie, soit

$$\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{m_\nu - 1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu - 1}$$

et considérons le produit infini

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)e^{\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)}\right\},$$

où les accolades indiquent que la quantité qu'elles comprennent est *un facteur* du produit infini. Nous allons montrer que ce produit infini est absolument convergent dans tout le plan et qu'il définit une fonction transcendante entière de x.

Soit A un nombre positif quelconque et considérons les valeurs de x pour lesquelles on a

$$|x| \leq \mathrm{A}.$$

Les nombres $|a_n|$ augmentant indéfiniment avec n, on peut faire correspondre au nombre A un entier r tel que l'on ait

$$|a_\nu| > \mathrm{A},$$

sous la condition

$$\nu \geq r.$$

Soit maintenant

$$\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)e^{\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)} = 1 + u_\nu(x);$$

nous allons d'abord montrer que le produit infini

$$\Psi_r(x) = \prod_{\nu=r}^{\nu=\infty}\left\{1 + u_\nu(x)\right\}$$

satisfait, pour toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

$$|x| \leq \mathrm{A},$$

aux conditions imposées dans le n° 41, ou plutôt que la série

$$\sum_{\nu=r}^{\nu=\infty} |u_\nu(x)|$$

satisfait aux conditions 1° et 2° du n° 38. En effet, on a vu que la série formée par les fonctions $u_\nu(x)$, quand on y remplace les coefficients des puissances de x par leurs valeurs absolues et x par A, a une somme moindre que

$$\left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu} \frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - A};$$

or la série à termes positifs

$$\sum_{\nu=r}^{\nu=\infty} \left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu} \frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - A}$$

est convergente, puisque, par hypothèse, il en est ainsi de la série à termes positifs

$$\sum_{\nu=r}^{\nu=\infty} \left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu},$$

et que le rapport de deux termes correspondants dans les deux séries a pour limite l'unité quand ν augmente indéfiniment.

La nature du produit infini $\Psi_r(x)$ est ainsi bien mise en évidence; il peut être remplacé par une série entière en x, convergente pourvu que l'on ait

$$|x| \leqq A.$$

Pour ces mêmes valeurs, on peut prendre la dérivée logarithmique (n° 48); cette dérivée sera, en indiquant les dérivées ordinaires par des accents,

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi'_r(x)}{\Psi_r(x)} &= \sum_{\nu=r}^{\nu=\infty} \left\{\frac{u'_\nu(x)}{1 + u_\nu(x)}\right\} = \sum_{\nu=r}^{\nu=\infty} \left\{\mathfrak{P}'_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right) - \frac{1}{a_\nu - x}\right\} \\
&= \sum_{\nu=r}^{\nu=\infty} \left\{\frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \frac{x^2}{a_\nu^3} + \ldots + \frac{x^{m_\nu-2}}{a_\nu^{m_\nu-1}} - \frac{1}{a_\nu - x}\right\} \\
&= -\sum_{\nu=r}^{\nu=\infty} \left\{\frac{x^{m_\nu-1}}{a_\nu^{m_\nu-1}(a_\nu - x)}\right\},
\end{aligned}$$

les *accolades* indiquant toujours que la quantité qu'elles enferment constitue *un terme unique* de la série où elle figure.

L'avant-dernière forme trouvée pour $\frac{\Psi'_r(x)}{\Psi_r(x)}$ rentre dans une forme très générale signalée par M. Mittag-Leffler et que nous développerons bientôt (n° 75).

La dernière forme met en évidence la convergence absolue, prévue par la théorie générale, de la série qui représente la dérivée logarithmique de $\Psi_r(x)$: on voit même que cette série, pour les valeurs de x telles que l'on ait

$$|x| \leqq \mathrm{A},$$

satisfait aux conditions (1°) et (2°) du n° 38; en effet, l'expression

$$\frac{x^{m_\nu - 1}}{a_\nu^{m_\nu - 1}(a_\nu - x)}$$

est, pour ces valeurs de x, développable en une série entière en x qui, lorsqu'on y remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et x par A, a pour somme

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\left|\frac{\mathrm{A}}{a_\nu}\right|^{m_\nu} \frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - \mathrm{A}},$$

et la série à termes positifs

$$\sum_{\nu = r}^{\nu = \infty} \frac{1}{\mathrm{A}}\left|\frac{\mathrm{A}}{a_\nu}\right|^{m_\nu} \frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - \mathrm{A}}$$

est convergente. Par conséquent, la série qui représente $\frac{\Psi'_r(x)}{\Psi_r(x)}$ peut être mise, pour toutes les valeurs de x considérées, sous forme d'une série entière en x absolument convergente. On peut prendre la dérivée de cette série, terme par terme : on formera ainsi successivement des séries absolument convergentes, pourvu que $|x|$ soit inférieure à A.

Rappelons enfin que, pour ces mêmes valeurs de x, les règles de dérivation, soit pour le produit infini, soit pour la dérivée logarithmique, s'appliqueraient aussi bien aux produits infinis déduits de $\Psi_r(x)$ ou aux séries déduites de celle qui représente $\frac{\Psi'_r(x)}{\Psi_r(x)}$ par le groupement des facteurs ou des termes (n^{os} 38 et 41).

Ces conclusions s'appliquent au produit

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)} \right\}$$

qui ne diffère de $\Psi_r(x)$ que par l'adjonction d'un nombre fini de facteurs dont nous représenterons le produit par

$$\Phi_r(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=r-1} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)} \right\},$$

en sorte que l'on a

$$G(x) = \Phi_r(x)\Psi_r(x),$$

et à la dérivée logarithmique de $G(x)$, savoir :

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{\Phi'_r(x)}{\Phi_r(x)} + \frac{\Psi'_r(x)}{\Psi_r(x)}.$$

On voit d'abord que le produit infini $G(x)$ sera uniformément et absolument convergent pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$|x| \leqq A.$$

Puisque $\Phi_r(x)$ est une fonction transcendante entière de x, $G(x)$ sera développable en une série entière en x, pour toutes les valeurs de x qui vérifient la condition précédente, c'est-à-dire pour toutes les valeurs possibles de x, puisque A est arbitraire.

On aura aussi

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{\Phi'_r(x)}{\Phi_r(x)} + \frac{\Psi'_r(x)}{\Psi_r(x)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{x^{m_\nu-1}}{a_\nu^{m_\nu-1}(x-a_\nu)}$$

pour toutes les valeurs de x qui satisfont à l'inégalité, et, par suite encore pour toutes les valeurs de x, sauf les valeurs

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots.$$

La série qui figure dans le dernier membre de l'égalité précédente est absolument convergente pour toutes les valeurs de x autres que celles que l'on vient d'exclure. La fonction qu'elle représente admet des dérivées de tous les ordres que l'on obtient en prenant les dérivées, terme par terme, de la série. Toutes les sé-

ries que l'on obtient ainsi sont absolument convergentes pour les valeurs de x non exclues.

Relativement à l'uniformité de la convergence de la série qui représente $\frac{G'(x)}{G(x)}$, observons que la série qui représente $\frac{\Psi'_r(x)}{\Psi_r(x)}$ est uniformément convergente dans le cercle de rayon A décrit du point o comme centre. En plaçant au commencement de cette série les termes qui représentent

$$\frac{\Phi'_r(x)}{\Phi_r(x)},$$

la seule chose qui puisse troubler l'uniformité de la convergence consiste en ce que, dans cette région, certains des termes ajoutés deviennent discontinus aux points $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Si donc on entoure ces points de cercles d'un rayon fixe, arbitrairement petit δ, si l'on supprime du plan les parties intérieures à ces cercles et si l'on décrit du point o comme centre, avec un rayon A, un cercle, la série qui représente

$$\frac{G'(x)}{G(x)}$$

sera uniformément convergente dans la portion du plan perforé intérieure à ce cercle. Il en serait de même des séries qui représentent les dérivées successives de cette fonction.

Les mêmes considérations montrent que toutes les fonctions représentées par ces diverses séries peuvent être développées en séries entières en $x - x_0$, convergentes dans tout cercle de centre x_0 et auquel sont extérieurs les trous que l'on a pratiqués dans le plan des x autour des points

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots.$$

Enfin, si l'on transforme le produit infini

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)} \right\}$$

ou la série

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \frac{x^{m_\nu - 1}}{a_\nu^{m_\nu - 1}(x - a_\nu)} \right\}$$

en un autre produit infini ou en une autre série, en groupant ensemble les facteurs ou les termes, on pourra appliquer les mêmes règles de dérivation au produit infini transformé ou à la série transformée. Quand on ne tient pas compte des $r-1$ premiers facteurs du produit ou des $r-1$ premiers termes de la série, la chose ressort, comme nous l'avons fait observer plus haut, des nos 38 et 41, lorsque x est intérieur au cercle de rayon A. Mais la présence de ces $r-1$ facteurs ou de ces $r-1$ termes, en nombre *fini*, ne peut évidemment altérer en rien les conclusions; et, comme A est arbitraire, ces conclusions s'étendent à tout le plan.

Puisque le produit infini $G(x)$ est absolument convergent pour toutes les valeurs de x, il ne peut s'annuler que si l'un des facteurs qui le composent est nul, c'est-à-dire si x est égal à l'un des nombres de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots.$$

S'il y a, dans cette suite, p termes égaux à a_n, on voit que l'on peut faire sortir du produit infini p facteurs égaux à

$$\left\{\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\mathfrak{P}_n\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right\},$$

et que le produit infini restant ne s'annulera plus pour $x=a_n$, en sorte que la proposition énoncée au début de ce numéro est entièrement démontrée.

72. Il est aisé maintenant d'obtenir l'expression générale de toutes les fonctions transcendantes entières qui satisfont aux conditions imposées dans l'énoncé de cette proposition.

Si $\Phi(x)$ est une telle fonction, la fonction $f(x)$ qui est égale à

$$\frac{\Phi(x)}{G(x)}$$

pour toutes les valeurs de x différentes de $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, et qui, pour $x=a_\nu$, est égale à

$$\lim_{x=a_\nu}. \frac{\Phi(x)}{G(x)},$$

est régulière (n° 53) pour chaque valeur de x.

Cela résulte, si x n'est pas un des nombres a_ν, de la règle pour la division de deux séries (n° 50) ; et si $x = a_\nu$, cela résulte encore de la même règle, en remarquant que l'on peut écrire, lorsque a_ν est un zéro d'ordre p (n° 44),

$$\Phi(x) = (x - a_\nu)^p \,\mathfrak{P}\,(x - a_\nu),$$
$$G(x) = (x - a_\nu)^p \,\mathfrak{P}_1(x - a_\nu),$$

en désignant ici par $\mathfrak{P}(x - a_\nu)$, $\mathfrak{P}_1(x - a_\nu)$, des séries entières en $x - a_\nu$, convergentes quel que soit x.

Par hypothèse la fonction $f(x)$, régulière quel que soit x, est aussi différente de zéro quel que soit x ; les fonctions

$$\frac{1}{f(x)}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)},$$

où $f'(x)$ désigne la dérivée de $f(x)$, sont donc également, en vertu du même théorème sur la division des séries, régulières quel que soit x. La fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$ en particulier est, d'après le théorème de Cauchy sur le développement en séries des fonctions d'une variable imaginaire (¹), développable en une série entière en x, convergente quel que soit x. Désignons cette série par $g'(x)$, en représentant par $g(x)$ une série entière en x, convergente quel que soit x, dont la dérivée soit $g'(x)$. L'équation

$$f'(x) = g'(x) f(x),$$

où l'on regarde $f(x)$ comme la fonction inconnue, est une équation différentielle linéaire qui, d'après sa forme même (n° 63), n'admet pas d'autres solutions que des fonctions transcendantes entières ; l'une quelconque de ces solutions est entièrement déterminée quand on se donne la valeur de la fonction $f(x)$ au point x_0. Or, comme, d'une part, la fonction

$$e^{g(x)+c},$$

où c est une constante arbitraire, vérifie cette équation, et que, d'autre part, on peut toujours déterminer la constante de manière

(¹) On pourrait déduire le même résultat du théorème signalé en note au n° 55.

que, en x_0, cette fonction prenne une valeur arbitraire différente de zéro, il est clair qu'elle est la solution générale de l'équation différentielle linéaire. Rien n'empêche d'ailleurs de faire rentrer c dans $g(x)$, en sorte que toutes les fonctions cherchées sont nécessairement de la forme

$$e^{g(x)}\,G(x).$$

Réciproquement, une expression de cette forme, où $g(x)$ est une série entière en x, convergente quel que soit x, d'ailleurs arbitraire, satisfait évidemment aux conditions imposées dans l'énoncé du théorème.

Si l'on voulait avoir l'expression générale d'une fonction transcendante entière, admettant, outre les zéros de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots.$$

la racine zéro et cela m fois, il suffirait évidemment de multiplier l'expression

$$e^{g(x)}\,G(x)$$

par x^m.

Les facteurs

$$\left\{\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)}\right\},$$

où les polynomes $\mathfrak{P}_\nu$ sont choisis de façon que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu}$$

soit convergente quel que soit x, sont dits *facteurs primaires* de la fonction transcendante entière considérée.

Il arrive, dans de nombreuses applications, que la convergence de la série précédente a lieu en attribuant à $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ la même valeur fixe. S'il en est ainsi, soit m le plus petit des nombres entiers positifs pour lesquels la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m}$$

soit convergente; la fonction

$$e^{g(x)} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)} \right\},$$

où les nombres m_ν sont tous choisis égaux à m, est dite de *genre* $m - 1$. Cette notion de genre est due à Laguerre.

73. Nous nous trouverons précisément dans ce cas si nous cherchons à construire une fonction qui s'annule, une fois seulement, pour tous les nombres entiers positifs ou négatifs.

En excluant le nombre zéro, nous pourrons prendre alors

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -1, \qquad a_3 = 2, \qquad a_4 = -2, \qquad a_5 = 3, \qquad \ldots,$$

et, à cause de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2},$$

prendre pour facteurs primaires les quantités

$$\left\{ \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \right\}.$$

Le produit infini

$$\prod_n{}^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \right\},$$

où n doit parcourir toutes les valeurs entières, positives et négatives, à l'exclusion de la valeur zéro [1], s'annulera toutes les fois que x est égal à un nombre entier non nul. Ce produit est absolument et uniformément convergent dans toute portion finie du plan des x. Il représente bien une fonction transcendante entière, de genre *un*, répondant à la question.

Comme ce produit infini est absolument convergent, on peut réunir ensemble les facteurs qui répondent à des valeurs de n

[1] Ce qui est indiqué par l'accent $^{(\prime)}$ dont est affecté le signe $\prod$.

égales et de signes contraires; on obtient ainsi le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

dont la valeur est, comme nous l'avons vu au n° 67, égale à

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x};$$

la formule

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \sin \pi x = \pi x \prod_n{}^{(')} \left\{\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right\}$$

exprime donc la décomposition de $\sin \pi x$ en ses facteurs primaires.

On aura de même

$$\cos \pi x = \prod_n \left\{\left(1-\frac{x}{n+\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{x}{n+\frac{1}{2}}}\right\},$$

où n prend toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives.

De même encore, la fonction transcendante entière, de genre *un*,

$$\varphi(x) = x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\},$$

s'annule pour $x=0$ et pour les valeurs négatives entières de x.

Cette fonction est liée à la fonction bien connue $\Gamma(x)$ par la relation (¹)

$$\varphi(x) = \frac{e^{-Cx}}{\Gamma(x+1)},$$

en désignant par C la constante d'Euler, c'est-à-dire la limite, pour n infini, de

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n;$$

on le reconnaît aisément en partant de la définition habituelle

(¹) Weierstrass, *loc. cit.*, p. 15 et 238.

de $\Gamma(x)$, savoir

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1.2.3\ldots n.n^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}.$$

La formule que nous venons d'écrire, et qui exprime donc la décomposition de $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ en ses facteurs primaires, est éminemment propre à établir les propriétés élémentaires soit de la fonction $\varphi(x)$ qu'elle définit, soit de la fonction $\Gamma(x)$.

74. Si l'on fait le quotient de deux fonctions entières, transcendantes ou non, il est clair qu'on obtient une fonction qui n'admet, à distance finie, d'autres singularités que des pôles ; ces pôles sont les zéros de la fonction que l'on fait figurer au dénominateur, en supposant que les deux fonctions n'aient pas de zéros communs.

Réciproquement, il importe de remarquer que toute fonction univoque qui n'admet pas d'autres singularités à distance finie que des pôles est le quotient de deux fonctions entières, transcendantes ou non.

D'abord ces pôles sont *isolés* les uns des autres; car si, dans un espace limité, il y en avait une infinité, il existerait dans cet espace un point *limite,* tel que, en décrivant autour de ce point un cercle de rayon arbitrairement petit, ce cercle contînt toujours une infinité de pôles; ce point ne pourrait être ni un point ordinaire, ni un pôle, ce serait un point singulier essentiel.

Soient, dès lors,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

les pôles de la fonction considérée, rangés de telle façon que, s'ils sont en nombre infini, $|a_n|$ augmente indéfiniment avec n; soit α_n le degré de multiplicité du pôle a_n. On peut, par le procédé de M. Weierstrass, construire une fonction entière, qui admette pour zéros les points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, avec les degrés de multiplicité $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$: si les pôles étaient en nombre fini, cette fonction se réduirait à un polynome; soit, dans tous les cas, $\Psi(x)$ cette fonction, et soit $f(x)$ la fonction proposée; il est clair que la fonction univoque

$$f(x)\Psi(x)$$

est *régulière* en tout point situé à distance finie; c'est donc une fonction entière, transcendante ou non; si on la désigne par $\Phi(x)$, on aura

$$f(x) = \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

75. Le théorème de M. Mittag-Leffler [1] fournit l'expression d'une fonction univoque dans tout le plan et présentant aux points

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots$$

des discontinuités polaires ou essentielles prescrites à l'avance.

Avant d'en donner l'énoncé, nous ferons les remarques suivantes :

1° Soit

$$g(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \; A_n x^n + \ldots$$

une série convergente quel que soit x, et dans laquelle le terme constant est nul, et soit α un nombre positif plus petit que la valeur absolue d'un nombre donné a réel ou imaginaire. La fonction

$$g\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

est alors développable en une série entière en x, absolument convergente tant que l'on a

$$|x| \leqq \alpha.$$

En effet, le terme

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

est développable en une série entière en x, et, si l'on remplace, dans cette série, les coefficients par leurs valeurs absolues et x par α, on obtiendra une série convergente dont la somme est

$$\frac{|A_n|}{(|a|-\alpha)^n};$$

---

[1] *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante* (*Acta mathematica*, t. IV, p. 1).

enfin la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|A_n|}{(|a|-\alpha)^n}$$

est convergente.

2° Si, maintenant, on considère le reste de la série entière qui représente $g\left(\frac{1}{x-a}\right)$ bornée au terme en x^n, et si l'on remplace dans ce reste, qui est lui-même une série entière en x, tous les coefficients par leurs valeurs absolues et x par α, on obtiendra un nombre positif dont la valeur dépend de n, et, en choisissant convenablement n, on pourra manifestement faire que ce nombre soit inférieur à tel nombre positif ε que l'on voudra, fixé à l'avance. *A fortiori,* le même reste, quand on y remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et x par un nombre moindre que α sera-t-il moindre que ε.

76. Voici maintenant le théorème de M. Mittag-Leffler :

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots$$

une suite indéfinie de nombres, tous différents, et tels que $|a_\nu|$ grandisse indéfiniment avec ν.

Soient

$$g_1(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_\nu(x), \quad \ldots$$

une suite de fonctions entières (transcendantes entières ou polynomes) qui s'annulent toutes pour $x = 0$.

On pourra construire une fonction $F(x)$, univoque dans tout le plan, régulière aux environs de toute valeur de x qui n'appartient pas à la suite $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, et telle que la différence

$$F(x) - g_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$$

soit régulière aux environs du point a_ν.

Supposons d'abord que a_1 soit différent de zéro et, par suite, qu'aucun des nombres a ne soit nul; faisons correspondre à ces nombres, d'une part, les nombres positifs

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_\nu, \quad \ldots,$$

assujettis à cette seule condition que la série

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\nu + \ldots$$

soit convergente; de l'autre, les nombres aussi positifs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\nu, \quad \ldots,$$

définis par l'égalité

$$\alpha_\nu = \eta\,|\,a_\nu\,|,$$

où η est un nombre positif arbitraire, moindre que un.

Ceci posé, développons $g_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ en une série entière en x, convergente pour les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

$$|\,x\,| \leqq \alpha_\nu < |\,a_\nu\,|;$$

faisons correspondre au nombre positif ε_ν un entier positif m_ν tel que, si l'on considère le reste de la série arrêtée au terme en $x^{m_\nu - 1}$, puis, que l'on remplace, dans ce reste, tous les coefficients par leurs valeurs absolues et x par α_ν, le nombre positif ainsi obtenu soit au plus égal à ε_ν. Désignons, d'ailleurs, par $\varphi_\nu(x)$ la somme des m_ν premiers termes de la série entière en x qui représente $g_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$, en sorte que

$$f_\nu(x) = g_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \varphi_\nu(x)$$

sera une fonction définie pour toutes les valeurs de x autres que a_ν, et qui, pour les valeurs de x satisfaisant à l'inégalité précédente, sera développable en une série entière en x, laquelle ne sera autre chose que le reste antérieurement défini.

Nous allons maintenant montrer que la somme de la série

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\nu(x) + \ldots,$$

dont on établira la convergence pour toutes les valeurs de x autres que $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, satisfait à toutes les conditions imposées, dans l'énoncé, à la fonction $F(x)$.

Soit, en effet, A un nombre positif fixe quelconque. Comme les nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ vont en grandissant indéfiniment, on peut faire correspondre au nombre A un entier r tel que, sous la condition

$$\nu \geqq r,$$

on ait

$$\alpha_\nu > A.$$

Dès lors, pour les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

$$|x| \leqq A,$$

la série

$$f_r(x) + f_{r+1}(x) + f_{r+2}(x) + \ldots$$

vérifie les conditions (1) et (2) du nº 38 : chacun de ses termes est développable en une série entière en x ; si, dans la série qui représente $f_r(x)$, on remplace tous les coefficients par leurs valeurs absolues et x par A, on aura une somme moindre que ε_r ; de même pour $f_{r+1}(x)$, $f_{r+2}(x)$, ... ; enfin la série

$$\varepsilon_r + \varepsilon_{r+1} + \varepsilon_{r+2} + \ldots$$

est convergente.

La série

$$\Psi_r(x) = f_r(x) + f_{r+1}(x) + f_{r+2}(x) + \ldots$$

est donc, pour toutes les valeurs considérées de x, absolument et uniformément convergente. De même les séries suivantes, où les accents indiquent des dérivées,

$$\begin{aligned}
\Psi'(x) &= f'_r(x) + f'_{r+1}(x) + f'_{r+2}(x) + \ldots, \\
\Psi''(x) &= f''_r(x) + f''_{r+1}(x) + f''_{r+2}(x) + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

sont absolument convergentes, si $|x|$ est inférieure à A, et peuvent alors être remplacées par des séries entières en x.

En supposant que x ne soit aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$, désignons par $\Phi_r(x)$ la somme

$$\Phi_r(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_{r-1}(x).$$

La série

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x) + \ldots$$

sera absolument convergente pour tous les points x non exclus qui vérifient l'inégalité

$$|x| \leqq A,$$

et l'on aura, pour ces points x,

$$F(x) = \Phi_r(x) + \Psi_r(x).$$

D'ailleurs, la fonction $\Phi_r(x)$ est régulière pour tous les points

non exclus qui se trouvent à l'intérieur du cercle de rayon A; il en est donc de même de la fonction $F(x)$.

Enfin, aux environs d'un point a_n de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$, la fonction

$$\Phi_r(x) - g_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

est régulière, puisqu'il en est ainsi de la fonction

$$f_n(x) - g_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = -\varphi_n(x);$$

donc la fonction

$$F(x) - g_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

est aussi régulière aux environs de a_n.

Pour tous les points intérieurs au cercle de rayon A, la fonction $F(x)$ satisfait donc aux diverses conditions de l'énoncé; elle y satisfait partout, puisque A est arbitraire.

La série qui représente $F(x)$ est absolument convergente partout, sauf aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$. Elle est uniformément convergente dans toute aire limitée par un contour simple et ne contenant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$; on peut en prendre la dérivée terme par terme, etc.

Nous avons supposé qu'aucun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ n'était nul. Si, outre ces points, la fonction cherchée devait admettre le point o comme point singulier (pôle ou point singulier essentiel) et être telle qu'elle devînt régulière autour de ce point après qu'on en a retranché la fonction $g\left(\frac{1}{x}\right)$, en désignant toujours par $g(x)$ une fonction entière (transcendante entière ou polynome) d'ailleurs arbitrairement donnée, il suffirait évidemment d'ajouter à la fonction $F(x)$, construite comme nous l'avons expliqué, la fonction $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Quand on a construit une fonction satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé, on formera la fonction la plus générale qui satisfasse à ces conditions en lui ajoutant une fonction entière arbitraire.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

(1re PARTIE.)

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES.

77. Désignons par a une constante réelle ou imaginaire; on dit que la fonction univoque $f(u)$ est *périodique* et qu'elle admet la *période* a si l'on a, quel que soit u,

$$f(u+a)=f(u);$$

en changeant dans cette égalité u en $u-a$, on trouve

$$f(u-a)=f(u),$$

en sorte que, si a est une période, $-a$ est aussi une période; on voit aussi, en changeant u en $u+a$, $u+2a$, ..., $u-a$, $u-2a$, ..., que l'on doit avoir, quel que soit l'entier positif ou négatif m,

$$f(u+ma)=f(u),$$

en sorte que, si a est une période, ma est aussi une période.

Les éléments de l'Analyse fournissent des exemples de fonctions périodiques : $\sin u$, e^u admettent respectivement les périodes 2π, $2i\pi$, la série

$$\sum_n A_n e^{n\frac{2i\pi u}{a}},$$

supposée convergente, représente une fonction admettant la période a.

78. Si une fonction univoque $f(u)$ admet la période a, et si elle s'annule pour $u=u_0$, il est clair qu'elle s'annulera pour $u=u_0+a$; mais il y a plus : si u_0 est un zéro d'ordre n de la fonction $f(u)$, il en sera de même de u_0+a. En effet, dire que u_0 est un zéro d'ordre n de la fonction $f(u)$, c'est dire que, aux environs de u_0, cette fonction peut se mettre sous la forme

$$f(u)=(u-u_0)^n\,\mathfrak{P}(u-u_0),$$

$\mathfrak{P}(u-u_0)$ étant une série entière en $u-u_0$, qui ne s'annule pas pour $u=u_0$, et cette égalité doit subsister pour toutes les valeurs de u qui satisfont à une condition de la forme

$$|u-u_0|<\varepsilon,$$

où ε désigne un nombre positif au plus égal au rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}(u-u_0)$; or si, dans l'égalité précédente, on change u en $u-a$, il vient

$$f(u-a)=f(u)=[u-(u_0+a)]^n\,\mathfrak{P}[u-(u_0+a)],$$

et l'égalité des deux derniers membres devant avoir lieu pour toutes les valeurs de u, qui satisfont à l'inégalité

$$|u-(u_0+a)|<\varepsilon,$$

obtenue en changeant aussi u en $u-a$ dans la condition précédente, la proposition est démontrée.

Au reste, le même mode de démonstration prouve que si la fonction périodique $f(u)$, aux environs du point u_0, peut être mise sous une certaine forme analytique

$$\Phi(u-u_0),$$

dans laquelle $u-u_0$ joue le rôle de variable, elle pourra, aux environs du point u_0+a, être mise sous la forme

$$\Phi[u-(u_0+a)].$$

Ainsi, si la fonction $f(u)$ admet un pôle en u_1, d'ordre n, et peut

se mettre aux environs de ce pôle, sous la forme

$$f(u) = \frac{A}{(u-u_1)^n} + \frac{A_1}{(u-u_1)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{u-u_1} + \mathfrak{P}(u-u_1),$$

où $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des constantes et $\mathfrak{P}(u-u_1)$ une série entière en $u-u_1$, cette fonction admettra le point u_1+a pour pôle d'ordre n et, aux environs de ce point, pourra se mettre sous la forme

$$f(u) = \frac{A}{(u-u_1-a)^n} + \frac{A_1}{(u-u_1-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{u-u_1-a} + \mathfrak{P}(u-u_1-a),$$

les constantes $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ayant les mêmes valeurs que pour le pôle u_1.

Puisque, si a est une période, il en est de même de ma, en désignant par m un entier quelconque, il est clair que tous les nombres u_0+ma seront des zéros de même ordre; de même tous les nombres u_1+ma seront des pôles de même ordre. C'est ainsi que les zéros de $\sin x$ sont tous simples et forment deux progressions arithmétiques dont la raison commune est 2π, que les zéros et les pôles de $\cot x$ sont tous simples et forment des progressions arithmétiques dont la raison est π.

79. Au surplus, lors même qu'on ne connaîtrait pas les fonctions trigonométriques, la remarque si simple qui précède, relative aux fonctions périodiques en général, amènerait à les considérer par une voie très naturelle.

On est en effet amené, par ce qui précède, à se poser le problème suivant : Construire une fonction dont les zéros forment une progression arithmétique indéfinie. Si l'on veut, par exemple, construire une fonction transcendante entière, admettant comme zéros simples les nombres

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \ldots, \quad \pm n, \quad \ldots,$$

et n'en admettant pas d'autres, le théorème de M. Weierstrass (n° 71) permettra d'en obtenir une infinité dont la plus simple sera

$$(a) \qquad \varphi(u) = u \prod_n{}' \left\{ \left(1-\frac{u}{n}\right) e^{\frac{u}{n}} \right\},$$

où le nombre n doit prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives, à l'exclusion de la valeur zéro.

Nous rappelons les conventions suivantes qui seront constamment adoptées dans la suite : le *facteur primaire*

$$\left\{\left(1-\frac{u}{n}\right)e^{\frac{u}{n}}\right\}$$

est mis entre *accolades*, de manière à indiquer que la quantité qu'enferment ces accolades constitue un facteur du produit infini, au sens du n° 71; l'accent $(')$ dont est affecté le signe $\prod$ veut dire qu'on obtient les différents facteurs du produit infini en donnant à n toutes les valeurs entières positives ou négatives à l'*exclusion de la valeur zéro :* nous rappelons aussi, une fois pour toutes, les propositions suivantes, qui ont été établies dans le n° 71.

Les produits infinis, formés en appliquant le théorème de M. Weierstrass, sont absolument convergents; ils définissent des fonctions (transcendantes) entières; leurs facteurs peuvent être groupés comme l'on veut, et les divers groupements conduisent toujours à des produits absolument convergents, de même valeur; on peut en prendre la dérivée logarithmique, comme s'il s'agissait de produits d'un nombre limité de facteurs, soit avant d'avoir groupé les facteurs, soit après; les séries ainsi formées sont absolument convergentes, sauf pour les valeurs de la variable qui annulent les facteurs primaires du produit infini; elles sont uniformément convergentes dans toute région limitée du plan qui ne contient aucun des points dont les affixes sont les valeurs qu'on vient de dire, et dont le contour est à distance finie de ces différents points; on peut en prendre les dérivées terme par terme et l'on obtient ainsi toujours des séries absolument et uniformément convergentes dans les mêmes conditions que la première.

En particulier, dans le cas qui nous occupe, on aura, en désignant par $\varphi'(u)$ la dérivée de $\varphi(u)$, la relation

$$(b) \qquad \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{1}{u} + \sum_{n}{}^{(')} \left\{ \frac{1}{u-n} + \frac{1}{n} \right\},$$

puis, en prenant les dérivées une fois de plus,

$$(c) \qquad -\frac{d}{du}\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \sum_n \frac{1}{(u-n)^2}:$$

dans la première de ces relations, les accolades indiquent que la quantité qu'elles enferment constitue un terme de la série, et n doit prendre toutes les valeurs entières positives et négatives, à l'exclusion de la valeur zéro, ce qui est indiqué par l'accent qui affecte le signe $\sum$; dans la seconde, n doit prendre toutes les valeurs entières positives, nulles et négatives. Nous avons déjà dit (nos 67, 73) que ces expressions pouvaient conduire directement aux propriétés relatives à la périodicité des fonctions $\varphi(u)$, $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$; mais nous allons établir à nouveau ces propriétés, afin d'indiquer un mode de raisonnement et quelques transformations de formules qui nous seront utiles plus tard.

Remarquons d'abord que l'expression même de $\varphi(u)$ montre que l'on a

$$\varphi(-u) = -\varphi(u),$$

puisque, sous le signe $\prod^{(\prime)}$, le changement de u en $-u$ revient au changement de n en $-n$ qui n'altère pas le produit infini; $\varphi(u)$ étant une fonction impaire, il en est de même de $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$. Il est aisé de reconnaître que cette dernière fonction s'annule pour $u = \frac{1}{2}$; on a, en effet,

$$\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 + \lim_{p=\infty} \sum_{n=1}^{n=p} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2}-n} + \frac{1}{n} \right\} + \lim_{p=\infty} \sum_{n=-1}^{n=-p} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2}-n} + \frac{1}{n} \right\};$$

le second membre est la limite pour p infini de

$$\begin{aligned} 2 &+ \left(1-\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{p}-\frac{2}{2p-1}\right) \\ &+ \left(\frac{2}{3}-1\right) + \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{2p+1}-\frac{1}{p}\right) = \frac{2}{2p+1}, \end{aligned}$$

limite qui est évidemment nulle.

Si, maintenant, dans l'expression de $\varphi(u)$, on change u en $u+a$, a désignant un nombre quelconque non entier, on trouve

$$\varphi(u+a) = (u+a)\prod_n{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u+a}{n}\right)e^{\frac{u+a}{n}}\right\};$$

or, le facteur primaire

$$\left\{\left(1-\frac{u+a}{n}\right)e^{\frac{u+a}{n}}\right\}$$

peut être regardé comme le produit des trois quantités

$$\left(1-\frac{u}{n-a}\right)e^{\frac{u}{n-a}},\quad \left(1-\frac{a}{n}\right)e^{\frac{a}{n}},\quad e^{u\left(\frac{1}{a-n}+\frac{1}{n}\right)}:$$

donc, en raison de la convergence manifeste des trois produits infinis dont on obtient les facteurs en remplaçant, dans chacune de ces quantités, n par tous les entiers positifs ou négatifs, à l'exclusion de zéro, on voit que le produit infini

$$\prod_n{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u+a}{n}\right)e^{\frac{u+a}{n}}\right\}$$

peut s'obtenir en multipliant les valeurs des trois produits infinis

$$\prod_n{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u}{n-a}\right)e^{\frac{u}{n-a}}\right\},$$

$$\prod_n{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{a}{n}\right)e^{\frac{a}{n}}\right\} = \frac{\varphi(a)}{a},$$

$$\prod_n{}^{(\prime)}\left\{e^{u\left(\frac{1}{a-n}+\frac{1}{n}\right)}\right\} = e^{u\sum_n^{(\prime)}\left\{\frac{1}{a-n}+\frac{1}{n}\right\}} = e^{u\left[\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}-\frac{1}{a}\right]};$$

on aura donc

$$\frac{\varphi(u+a)}{u+a} = \frac{\varphi(a)}{a}\,e^{u\left[\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}-\frac{1}{a}\right]}\prod_n{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u}{n-a}\right)e^{\frac{u}{n-a}}\right\},$$

ou, en faisant rentrer sous le signe $\prod$ le facteur

$$\left(1+\frac{u}{a}\right)e^{-\frac{u}{a}},$$

qui n'est autre que le facteur général écrit sous ce signe, et dans lequel on supposerait $n = 0$, on trouve finalement

$$(d) \qquad \prod_n \left\{ \left(1 - \frac{u}{n-a}\right) e^{\frac{u}{n-a}} \right\} = \frac{\varphi(u+a)}{\varphi(a)} e^{-u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}};$$

dans le premier membre, n doit maintenant prendre toutes les valeurs entières positives, nulles et négatives.

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à u, on obtient la relation

$$(e) \qquad \sum_n \left\{ \frac{1}{u+a-n} + \frac{1}{n-a} \right\} = \frac{\varphi'(u+a)}{\varphi(u+a)} - \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)},$$

que l'on déduit d'ailleurs directement de l'expression de $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$; les premiers membres des deux dernières égalités, regardés comme des fonctions de a, sont évidemment des fonctions périodiques, admettant le nombre 1 pour période; en effet, le changement de a en $a+1$, dans ces premiers membres, revient au changement de n en $n-1$ qui ne fait que reculer d'un rang les facteurs ou les termes du produit ou de la série et n'altère pas la valeur de ce produit ou de cette série; on a donc

$$\frac{\varphi'(u+a+1)}{\varphi(u+a+1)} - \frac{\varphi'(a+1)}{\varphi(a+1)} = \frac{\varphi'(u+a)}{\varphi(u+a)} - \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}$$

ou

$$\frac{\varphi'(u+a+1)}{\varphi(u+a+1)} - \frac{\varphi'(u+a)}{\varphi(u+a)} = \frac{\varphi'(a+1)}{\varphi(a+1)} - \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)},$$

égalité qui montre que le second membre est indépendant de a; on voit de suite que sa valeur est nulle en y supposant $a = -\frac{1}{2}$; on a, en effet, par les remarques précédentes,

$$0 = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\varphi'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)};$$

ainsi la fonction $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$ est périodique et admet l'unité pour période.

On trouve de la même façon, en remarquant encore que le produit infini

$$\prod_n \left\{ \left(1 - \frac{u}{n-a}\right) e^{\frac{u}{n-a}} \right\},$$

considéré comme une fonction de a, admet l'unité comme période,

$$\frac{\varphi(u+a+1)}{\varphi(a+1)} e^{-u\frac{\varphi'(a+1)}{\varphi(a+1)}} = \frac{\varphi(u+a)}{\varphi(a)} e^{-u\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}},$$

ou, en tenant compte de la périodicité de la fonction $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$,

$$\frac{\varphi(u+a+1)}{\varphi(u+a)} = \frac{\varphi(a+1)}{\varphi(a)},$$

égalité qui montre que le second membre est indépendant de a. En y supposant $a = -\frac{1}{2}$, on trouve que sa valeur est -1; on en conclut sans peine que la fonction $\varphi(u)$ est périodique et admet le nombre deux comme période. Les fonctions $[\varphi(u)]^2$, $\varphi(2u)$ admettraient l'unité comme période.

D'ailleurs, la fonction $\varphi(u)$ n'admet pas d'autres périodes que le nombre deux et ses multiples entiers, et c'est ce qui résulte encore de la remarque qui a conduit à la former. En effet, $\varphi(u)$ ne peut admettre comme période un nombre impair $2n+1$; on a, en effet, puisque 2 et $2n$ sont des périodes,

$$\varphi(u+2n+1) = \varphi(u+1) = -\varphi(u);$$

mais un nombre qui ne serait pas entier ne peut être une période : en effet, puisque la fonction $\varphi(u)$ s'annule pour $u=0$, elle doit s'annuler pour toute période; or elle ne s'annule que pour des valeurs entières de u.

On voit comment la forme considérée de la fonction $\varphi(u)$ met en évidence les propriétés les plus importantes de cette fonction relatives à la périodicité. D'autres propriétés apparaissent moins facilement sur cette forme et se rattachent à d'autres formes analytiques qu'elle peut revêtir; mais nous ne voulons pas étudier davantage cette fonction, qui n'est autre chose que $\frac{\sin \pi u}{\pi}$ (n° 73), et nous nous bornerons à récrire, avec les notations de la Trigo-

nométrie, les formules (a), (b), (c), (d), (e). On obtient ainsi

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \sin\pi u = \pi u \prod_n{}^{(\prime)} \left\{\left(1-\frac{u}{n}\right)e^{\frac{u}{n}}\right\},$$

$$(\mathrm{I}_2)\qquad \pi\cot\pi u = \frac{1}{u} + \sum_n{}^{(\prime)} \left\{\frac{1}{u-n}+\frac{1}{n}\right\},$$

$$(\mathrm{I}_3)\qquad \frac{\pi^2}{\sin^2\pi u} = \sum_n \frac{1}{(u-n)^2},$$

$$(\mathrm{I}_4)\qquad \prod_n \left\{\left(1-\frac{u}{n-a}\right)e^{\frac{u}{n-a}}\right\} = \frac{\sin\pi(u+a)}{\sin\pi a}e^{-u\pi\cot\pi a},$$

$$(\mathrm{I}_5)\qquad \sum_n \left\{\frac{1}{u+a-n}+\frac{1}{n-a}\right\} = \pi[\cot\pi(u+a)-\cot\pi a].$$

80. Nous avons dit que, si une fonction $f(u)$ admettait une période égale à a, tous les multiples entiers de a étaient aussi des périodes de cette fonction; il n'y a pas lieu de regarder ces diverses périodes comme véritablement distinctes. Si la fonction $f(u)$ n'admet pas d'autres périodes que celles-là, elle est dite *simplement* périodique, et l'on dit que a en est la période *primitive :* ainsi 2 est une période primitive de la fonction $\varphi(u)$ du numéro précédent, 2π est une période primitive de $\sin u$.

On peut se demander s'il peut exister des fonctions univoques $f(u)$ admettant deux périodes distinctes a et b, c'est-à-dire des fonctions telles que l'on ait, quel que soit u,

$$f(u+a) = f(u), \qquad f(u+b) = f(u),$$

et, par conséquent aussi, quels que soient les nombres entiers m, n, positifs, nuls ou négatifs,

$$f(u+ma+nb) = f(u).$$

En disant que les périodes a et b sont distinctes, nous entendons simplement ici qu'il n'existe pas un troisième nombre α dont a et b soient des multiples entiers et qui soit lui-même une période de la fonction $f(u)$. Si un tel nombre existait, on ne dirait rien de plus en disant que a, b sont des périodes, qu'en disant que α est une période. On peut se demander aussi s'il peut exister des fonctions univoques admettant trois périodes distinctes a, b, c,

c'est-à-dire des fonctions $f(u)$ telles que l'on ait, quel que soit u et quels que soient les entiers m, n, p,

$$f(u+ma+nb+pc)=f(u).$$

En disant que les périodes a, b, c sont distinctes, on entend qu'elles ne peuvent pas s'exprimer toutes trois en fonction linéaire à coefficients entiers de deux périodes de $f(u)$. S'il en était ainsi, on n'aurait rien de plus que dans le cas des fonctions à deux périodes, etc.

81. Avant d'essayer de répondre à ces questions, nous établirons le lemme suivant :

Si une fonction univoque $f(u)$ est régulière en un point u_0 (nº 53) et ne se réduit pas à une constante, il existe un nombre positif ε tel que la valeur absolue de toute période de cette fonction soit certainement supérieure à ε.

En effet, dire que la fonction $f(u)$ est régulière en u_0, c'est dire qu'il existe un nombre positif η tel que, pour toutes les valeurs de h qui vérifient l'inégalité

$$|h|<\eta,$$

l'on ait, en désignant par n l'ordre de la première des dérivées de $f(u)$ qui ne s'annule pas pour $u=u_0$,

$$f(u_0+h)-f(u)=\frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(u_0)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(u_0)+\ldots\right].$$

Or, s'il en est ainsi, on a vu (nº 36) qu'il existe un nombre positif ε tel que la série qui figure entre crochets dans le second membre de cette égalité ne s'annule pour aucune valeur de h moindre que ε en valeur absolue. Si donc on veut que l'on ait

$$f(u_0+a)=f(u_0),$$

il faut que $|a|$ soit supérieure à ε.

82. Il résulte de là que si la fonction univoque $f(u)$, régulière en u_0, est périodique, les différents points qui figurent les diverses périodes que cette fonction peut admettre sont tous à une distance du point o supérieure à ε. Si cette même fonction admet

les deux périodes a, b, elle admettra comme périodes tous les nombres $ma+nb$, en désignant par m et n des entiers. En particulier, la différence de deux périodes quelconques sera une période; par suite, si l'on figure les diverses périodes par des points, la distance de deux quelconques de ces points sera supérieure à ε, puisque cette distance est la valeur absolue de la différence entre les affixes de ces points, différence qui est elle-même une période.

On en conclut que, dans une portion limitée du plan, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de points figurant des périodes; en effet, on pourrait paver le plan avec de petits carrés dont la diagonale serait inférieure à ε; or, dans chacun de ces carrés, il ne peut y avoir qu'un seul des points considérés.

83. Nous allons maintenant établir les deux propositions suivantes :

I. Si une fonction univoque $f(u)$, régulière en un point u_0, et qui ne se réduit pas à une constante, admet deux périodes a, b dont le rapport soit réel, il existe une période α de la fonction $f(u)$ dont toute autre période est un multiple entier : en d'autres termes, cette fonction est simplement périodique et α en est une période primitive.

II. Si une fonction univoque $f(u)$, régulière en un point u_0, et qui ne se réduit pas à une constante, admet deux périodes a, b dont le rapport soit imaginaire, il existe un couple de périodes α, β de la fonction $f(u)$, tel que toute période de cette fonction soit une fonction linéaire homogène à coefficients entiers de α, β.

1° Si a, b sont des périodes dont le rapport est réel, tous les points $ma+nb$ sont situés sur la droite qui passe par les points 0, a, b; leurs distances mutuelles sont plus grandes que ε; il y a donc un de ces points qui est plus rapproché que les autres de l'origine, puisque sur un segment fini de cette droite ayant son origine en 0, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de points figurant des périodes. Soit α l'affixe du point le plus rapproché; tous les nombres $p\alpha$, où p désigne un entier, sont des périodes; ils sont figurés par des points équidistants sur la droite considérée; or, aucune période β ne peut être figurée par un point situé entre

deux points consécutifs $p\alpha$, $(p+1)\alpha$, sans quoi la distance des points β et $p\alpha$ serait moindre que $|\alpha|$, et, puisque la différence entre les périodes $p\alpha$ et β est une période, il y aurait un point figurant une période plus rapproché de zéro que le point α; ainsi, toutes les périodes sont des multiples de α, en particulier a et b, qui ne sont pas des périodes distinctes. La fonction est simplement périodique et α est une période primitive (¹).

2° Si donc la fonction $f(u)$, régulière en un point, admet deux périodes distinctes a, b, le rapport de ces deux périodes, et, par conséquent, l'une d'elles au moins, est imaginaire.

Avant d'aller plus loin, il convient de se rendre compte de la façon dont sont distribués tous les points $ma+nb$, m et n étant entiers.

Tous les points ma sont des points équidistants sur la droite qui passe par les points 0, a; de même les points nb, sur la droite

---

(¹) On arrive à la même conclusion par les considérations arithmétiques que voici :

Supposons d'abord que le rapport $\frac{b}{a}$ soit un nombre rationnel $\frac{q}{p}$, q et p étant des entiers premiers entre eux ; il existera alors un nombre α tel que l'on ait

$$a = p\alpha, \qquad b = q\alpha,$$

et il suffit de prouver que α est une période pour démontrer que a et b ne sont pas des périodes distinctes ; or c'est ce qui résulte de ce qu'il existe des entiers p', q' tels que l'on ait

$$1 = pp' + qq',$$

et, par suite,

$$\alpha = p'a + q'b.$$

Supposons maintenant que le rapport des deux périodes $\frac{b}{a}$ soit un nombre irrationnel réel ρ; la théorie des fractions continues montre qu'il existe des fractions à termes entiers $\frac{p}{q}$, à dénominateur aussi grand qu'on le veut et, telles que l'on ait

$$\left|\frac{p}{q} - \rho\right| < \frac{1}{q^2};$$

la valeur absolue de $pa - qb$ ou $a(p - q\rho)$ étant moindre que

$$\frac{|a|}{q}$$

peut être supposée aussi petite que l'on veut; mais, $pa - qb$ étant une période, on voit que cela est impossible si la fonction $f(u)$ est régulière en quelque point.

qui passe par les points o, b : les deux droites sont d'ailleurs distinctes, puisque le rapport $\frac{b}{a}$ est imaginaire ; si, par les différents points de division de la première, on mène des parallèles à la seconde, et, par les différents points de division de la seconde, des parallèles à la première, on décomposera le plan en un réseau de parallélogrammes tous égaux et dont les sommets auront des affixes de la forme $ma + nb$; le point $ma + nb$ sera obtenu par l'intersection de la parallèle à la seconde droite, menée par le point ma, et de la parallèle à la première droite, menée par le point nb.

Nous désignerons sous le nom de *premier parallélogramme du réseau* le parallélogramme ayant pour sommets les points o, a, $a + b$, b, et nous regarderons comme *appartenant* à ce parallélogramme tous les points qui lui sont intérieurs, les points situés sur le côté qui va de o à a, sauf le point a, les points situés sur le côté qui va de o à b, sauf le point b ; les points situés sur les deux autres côtés n'appartiennent pas au premier parallélogramme.

De même, tous les points $u + ma + nb$, où m, n doivent prendre encore toutes les valeurs entières positives, nulles et négatives, sont situés aux sommets d'un réseau de parallélogrammes identique au précédent, et qui s'en déduirait en faisant subir à toute la figure une translation égale au segment qui va du point o au point u. Tous ces points $u + ma + nb$, pour lesquels la fonction $f(u)$ reprend la même valeur, sont situés de la même façon par rapport aux parallélogrammes du premier réseau $(ma + nb)$ qui les contiennent ; nous dirons de tous ces points qu'ils sont *congruents ;* étant donné un point quelconque u du plan, il existe un point appartenant au premier parallélogramme, et un seul, congruent au point u.

Il est clair, d'après cela, qu'on connaîtra entièrement une fonction admettant les périodes a, b, si on la connaît pour tous les points qui appartiennent au premier parallélogramme du réseau ; elle se *reproduira* dans les autres parallélogrammes.

Remarquons encore, en général, que si a, b, c sont les affixes de trois points, le quatrième sommet du parallélogramme ayant l'un de ses sommets en a et ayant pour diagonale le segment qui joint les points b, c a pour affixe $b + c - a$; en effet, si l'on

désigne par d cette affixe, on devra avoir, en vertu de la représentation géométrique de l'addition des nombres imaginaires,

$$b + c = a + d;$$

il résulte de là, en particulier, que, si a, b, c sont des périodes de la fonction $f(u)$, le quatrième sommet de tout parallélogramme dont a, b, c sont trois sommets figurera aussi une période.

Ceci posé, imaginons que la fonction univoque $f(u)$, régulière en un point, admette les deux périodes a, b à rapport imaginaire et considérons l'ensemble des points qui peuvent figurer des périodes de cette fonction : ces points, que nous appellerons *points-périodes,* sont isolés, et leurs distances mutuelles sont au moins égales à ε; choisissons arbitrairement l'un d'eux, et menons, à partir du point o, la demi-droite qui le contient; il y aura sur cette demi-droite une infinité de points-périodes, mais, comme on l'a vu plus haut, il y en a un qui est plus rapproché de o que les autres; désignons-le par α; décrivons du point o comme centre un cercle, avec un rayon plus grand que $|\alpha|$ et assez grand pour embrasser un ou plusieurs autres points-périodes, non situés sur le rayon qui passe par α; faisons tourner ce rayon autour du centre de façon à rencontrer un point-période situé dans le cercle avant d'avoir décrit deux angles droits, et arrêtons-le dès que l'on a rencontré un tel point; désignons par β le point-période le plus rapproché de o, situé sur le rayon dans cette nouvelle position. Il est manifeste que le triangle ayant pour sommets les points o, α, β ne contient à son intérieur ni sur son contour aucun autre point-période que ses sommets; il en est de même du parallélogramme ayant pour sommets les points o, α, $\alpha + \beta$, β : ce parallélogramme, en effet, est séparé en deux triangles par la diagonale qui joint les deux points α, β; l'un de ces triangles a pour sommets o, α, β; le second a pour sommets α, β, $\alpha + \beta$; or si ce second triangle contenait à son intérieur ou sur son contour un point-période γ distinct de ses sommets, le sommet $\alpha + \beta - \gamma$ du parallélogramme dont le segment qui joint α, β est une diagonale et dont γ est un sommet, serait un point-période et appartiendrait au premier triangle, ce qui est impossible. Le parallélogramme dont les sommets sont o, α, $\alpha + \beta$, β ne contient donc à son intérieur et sur son contour aucun autre point-

période que ses sommets. Dès lors, si on le considère comme le premier parallélogramme d'un réseau dont les sommets auraient pour affixes les différentes valeurs de $m\alpha + n\beta$, on voit qu'aucun parallélogramme du réseau ne pourra contenir à son intérieur ou sur son contour (en dehors des sommets) aucun point-période, sans quoi, le point congruent du premier parallélogramme serait un point-période, ce que l'on a démontré être impossible.

Ainsi, toute période de la fonction $f(u)$ est nécessairement de la forme $m\alpha + n\beta$, et l'on voit en particulier que cette fonction ne peut admettre trois périodes distinctes [1].

En résumé, lorsqu'une fonction univoque $f(u)$, régulière en un point, admet un couple de périodes à rapport imaginaire, il existe

---

[1] La démonstration arithmétique de cette dernière proposition résulte de la généralisation de la méthode d'approximation des fractions continues que voici, et qui est due à M. Hermite.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n nombres réels quelconques; on peut en approcher comme il suit par des fractions à termes entiers et de *même dénominateur :* soit $\mathfrak{L}$ un entier positif arbitrairement choisi et x un des nombres $1, 2, \ldots, \mathfrak{L}^n$; prenons pour x_i le nombre entier défini par les inégalités

$$0 < \alpha_i x - x_i < 1;$$

si les parties entières des n expressions

$$\mathfrak{L}(\alpha_i x - x_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sont nulles, on en restera là; sinon on prendra pour x un autre des nombres de la suite $1, 2, \ldots, \mathfrak{L}^n$. Si, après avoir essayé tous ces nombres, aucun des $\mathfrak{L}^n$ systèmes de n nombres entiers positifs moindres que $\mathfrak{L}$, formés par les parties entières des n expressions $\mathfrak{L}(\alpha_i x - x_i)$ n'est composé de nombres tous nuls, c'est que deux systèmes sont composés de nombres identiques, puisque, avec les $\mathfrak{L}$ nombres $0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{L} - 1$, on ne peut former que $\mathfrak{L}^n$ systèmes distincts de n nombres, et que l'un de ces systèmes est formé de n nombres nuls; par suite, dans le cas supposé, il existe deux nombres x, x', pris dans la suite $1, 2, \ldots, \mathfrak{L}^n$, tels que les parties entières des n expressions

$$\mathfrak{L}(\alpha_i x - x_i)$$

soient respectivement égales aux parties entières des n expressions

$$\mathfrak{L}(\alpha_i x' - x'_i).$$

Dès lors, on aura

$$\mathfrak{L}\,|\,\alpha_i(x - x') - (x_i - x'_i)| < 1;$$

en résumé, on peut toujours choisir les entiers $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, tels que l'on ait

$$|\alpha_i x - x_i| < \frac{1}{\mathfrak{L}};$$

un couple de périodes dont toutes les autres périodes sont des fonctions linéaires à coefficients entiers : un tel couple de périodes est dit *couple primitif;* nous verrons d'ailleurs plus tard qu'il en existe une infinité. La fonction $f(u)$ est dite doublement périodique.

A la vérité, rien encore n'autorise à affirmer l'existence de pareilles fonctions, existence qui a été supposée dans ce qui précède; c'est la construction de ces fonctions qui va maintenant nous occuper.

84. Parmi les fonctions univoques, les plus simples sont les fonctions rationnelles; mais on aperçoit de suite qu'elles ne peuvent être périodiques, à moins de se réduire à une constante. Il y a, au contraire, des fonctions périodiques parmi les fonctions transcendantes entières; telles sont les fonctions simplement périodiques

---

le nombre x est positif, et au plus égal à $\mathcal{L}^n$; il est facile d'assigner des limites supérieures aux valeurs absolues des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ceci établi, on démontrera comme il suit l'impossibilité de trois périodes distinctes

$$a = \lambda + \lambda' i, \qquad b = \mu + \mu' i, \qquad c = \nu + \nu' i;$$

si l'on désigne par x, y, z des entiers, le nombre $P + iP'$, où l'on suppose

$$P = \lambda x + \mu y + \nu z, \qquad P' = \lambda' x + \mu' y + \nu' z,$$

sera aussi une période, et il suffit, pour établir la proposition énoncée, d'établir que l'on peut choisir les entiers x, y, z de manière que les valeurs absolues de P, P' soient moindres que toute quantité donnée : or, on tire des égalités précédentes

$$(\lambda\mu' - \lambda'\mu)x - (\mu\nu' - \mu'\nu)z = P\mu' - P'\mu,$$
$$(\lambda\mu' - \lambda'\mu)y - (\lambda'\nu - \lambda\nu')z = P'\lambda - P\lambda';$$

aucune des expressions $\lambda\mu' - \lambda'\mu$, $\mu\nu' - \mu'\nu$, $\lambda'\nu - \lambda\nu'$ n'est nulle; si la première en effet était nulle, le rapport $\frac{a}{b}$ serait réel, et ce cas a déjà été exclu; or, après avoir fixé le nombre entier $\mathcal{L}$, on peut déterminer les entiers x, y, z de manière que les premiers membres des égalités précédentes soient moindres en valeur absolue que $\frac{1}{\mathcal{L}}$; si donc on désigne par $\varepsilon, \varepsilon'$ des nombres moindres que 1 en valeur absolue, on aura

$$P\mu' - P'\mu = \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}}, \qquad P'\lambda - P\lambda' = \frac{\varepsilon'}{\mathcal{L}},$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{\lambda\varepsilon + \mu\varepsilon'}{\mathcal{L}(\lambda\mu' - \lambda'\mu)}, \qquad P' = \frac{\lambda'\varepsilon + \mu'\varepsilon'}{\mathcal{L}(\lambda\mu' - \lambda'\mu)},$$

or, comme $\mathcal{L}$ peut être supposé aussi grand qu'on le veut, P et P' peuvent être supposés aussi petits qu'on le veut.

$\sin x$, e^x; mais *toute fonction entière, transcendante ou non, qui est doublement périodique se réduit à une constante.* C'est là une proposition extrêmement importante, due à Liouville et dont l'illustre géomètre a montré qu'elle pouvait servir de principe pour fonder la théorie qui nous occupe ([1]). Sa démonstration est d'ailleurs immédiate; considérons en effet le réseau de parallélogrammes formé, comme il a été expliqué plus haut, au moyen de deux périodes; une fonction (transcendante) entière restera évidemment finie dans le premier parallélogramme du réseau; sa valeur absolue y restera inférieure à un nombre positif fixe A; et, à cause de la périodicité, cette valeur restera moindre que A dans chaque parallélogramme, c'est-à-dire pour n'importe quelle valeur finie de la variable : or, on a vu (nº 35) que, dans ces conditions, une fonction transcendante entière se réduit nécessairement à une constante; le théorème de Liouville est donc démontré.

85. Après les fonctions transcendantes entières, les fonctions univoques les plus simples, parmi celles qui admettent des dérivées, sont celles qui n'admettent pas d'autres singularités à distance finie que des *pôles :* sauf en ces pôles (et au point ∞), elles sont partout régulières ; leurs pôles sont nécessairement isolés. Elles se comportent comme des fonctions rationnelles pour toutes les valeurs finies de la variable. Rappelons encore qu'elles peuvent être regardées comme le quotient de deux fonctions entières, transcendantes ou non (nº 74) ; ce sont ces fonctions que nous considérerons *exclusivement,* et voici la marche que nous suivrons pour former celles d'entre elles qui sont doublement périodiques.

Considérons une telle fonction univoque $f(u)$, n'ayant pas d'autres singularités à distance finie que des pôles. Supposons que l'on ait

$$f(u) = \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)},$$

$\Phi(u)$ et $\Psi(u)$ désignant des fonctions entières (transcendantes ou non) de la variable u, qui ne s'annulent pas pour une même

([1]) *Leçons sur les fonctions doublement périodiques* (*Journal de Crelle*, t. LXXXVIII).

valeur de u; les pôles de $f(u)$ correspondront aux zéros de $\Psi(u)$, ses zéros correspondront aux zéros de $\Phi(u)$. Supposons que la fonction $f(u)$ admette les périodes a, b, dont le rapport sera nécessairement imaginaire, et envisageons le réseau de parallélogrammes formé au moyen de ces périodes. Dans le premier de ces parallélogrammes, la fonction $f(u)$ aura au moins un pôle, sans quoi, elle n'en aurait nulle part. Elle en aura, d'ailleurs, un nombre fini, sans quoi, elle admettrait nécessairement dans ce parallélogramme un point singulier essentiel, limite des pôles en nombre infini. Si les pôles distincts appartenant au premier parallélogramme sont

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q,$$

tous les points *congruents* aux points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ seront aussi des pôles de la fonction, avec les mêmes degrés de multiplicité respectifs que ces points. En effet, si m, n sont des entiers, $ma + nb$ est une période et, par conséquent, $\beta_i + ma + nb$ est un pôle de même ordre ν_i que β_i, $(i = 1, 2, \ldots, q)$; donc la fonction $\Psi(u)$ admettra comme zéros tous les points $\beta_i + ma + nb$, avec l'ordre ν_i, $(i = 1, 2, \ldots, q)$; elle n'en admettra pas d'autres.

De même, dans le premier parallélogramme, la fonction $f(u)$ admettra au moins un zéro; car, autrement, la fonction doublement périodique

$$\frac{1}{f(u)} = \frac{\Psi(u)}{\Phi(u)},$$

qui n'admet aussi d'autres singularités que des pôles, n'aurait aucune singularité si elle n'admettait pas quelque pôle dans le premier parallélogramme; ce serait donc une fonction entière, et, par conséquent, en vertu du théorème de Liouville, une constante. Dans ce premier parallélogramme, $f(u)$ ne peut admettre qu'un nombre fini de zéros; soient donc

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_p$$

les zéros distincts de la fonction $\Phi(u)$, appartenant au premier parallélogramme, et soit μ_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, l'ordre de multiplicité du zéro α_i; tous les nombres $\alpha_i + ma + nb$ seront des zéros d'ordre μ_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, pour la fonction $\Psi(u)$, et celle-ci n'admettra pas d'autres zéros.

Imaginons donc qu'on construise, par la règle de M. Weier-

strass (n° 71), une fonction *transcendante* entière σu (¹) admettant pour zéros simples tous les nombres $ma + nb$, et n'en admettant pas d'autres, on devra avoir, en vertu du théorème que nous venons de rappeler, et en désignant par $\varphi(u)$, $\psi(u)$ des fonctions (transcendantes) entières de u,

$$\Phi(u) = e^{\varphi(u)}[\sigma(u-\alpha_1)]^{\mu_1}[\sigma(u-\alpha_2)]^{\mu_2}\ldots[\sigma(u-\alpha_p)]^{\mu_p},$$
$$\Psi(u) = e^{\psi(u)}[\sigma(u-\beta_1)]^{\nu_1}[\sigma(u-\beta_2')]^{\nu_2}\ldots[\sigma(u-\beta_q)]^{\nu_q}.$$

En effet, on voit de suite, comme au n° 72, que la fonction, régulière pour toute valeur finie de u, et ne s'annulant pour aucune valeur de u,

$$\frac{\Phi(u)}{[\sigma(u-\alpha_1)]^{\mu_1}[\sigma(u-\alpha_2)]^{\mu_2}\ldots[\sigma(u-\alpha_p)]^{\mu_p}},$$

est une fonction (transcendante) entière de u de la forme

$$e^{\varphi(u)}.$$

Il en résulte que la fonction $f(u)$ est nécessairement de la forme

$$f(u) = e^{g(u)}\frac{[\sigma(u-\alpha_1)]^{\mu_1}\ldots[\sigma(u-\alpha_p)]^{\mu_p}}{[\sigma(u-\beta_1)]^{\nu_1}\ldots[\sigma(u-\beta_q)]^{\nu_q}}.$$

Nous retrouverons cette forme plus tard, avec une signification plus précise; nous avons seulement voulu montrer ici comment l'étude de la fonction σu s'imposait d'une façon nécessaire; c'est la construction de cette fonction et l'examen de ses propriétés élémentaires qui vont maintenant nous occuper.

C'est Eisenstein qui, le premier, a construit cette fonction (²). Toutefois le produit infini à double entrée qu'il considère n'est pas absolument convergent et est, par suite, moins *maniable* que celui que nous allons considérer en suivant la méthode et en adoptant les notations de M. Weierstrass.

(¹) Dans les Chapitres qui suivent, on désignera par ce symbole une fonction particulière entièrement déterminée.

(²) Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zuzammengesetzt sind. (*Eisenstein's Mathematische Abhandlungen*, p. 213; Berlin, 1847.)

CHAPITRE II.

LA FONCTION σu ET LES FONCTIONS QUI EN DÉRIVENT.

I. — Les trois fonctions σu, ζu, $p u$. L'argument augmente de $2\omega_\alpha$.

86. Nous adopterons les notations et les conventions qui suivent :

Désignons par $2\omega_1$, $2\omega_3$ deux nombres dont le rapport soit imaginaire; nous apprendrons bientôt à former des fonctions doublement périodiques, pour lesquelles ces nombres constitueront un couple primitif de périodes, et nous emploierons de suite les mots périodes pour désigner ces nombres; quoi qu'il en soit, nous considérerons le réseau de parallélogrammes formé par les points

$$2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

m, n prenant toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives; comme dans le n° 83. Nous désignerons sous le nom de *premier parallélogramme* le parallélogramme dont le *premier*, le *deuxième*, le *troisième* et le *quatrième* sommet auront respectivement pour affixes

$$0, \quad 2\omega_1, \quad 2\omega_1 + 2\omega_3, \quad 2\omega_3;$$

le *premier*, le *deuxième*, le *troisième* et le *quatrième* côté joignent respectivement les points $0, 2\omega_1$; $2\omega_1$, $2\omega_1 + 2\omega_3$; $2\omega_1 + 2\omega_3$, $2\omega_3$; $2\omega_3, 0$. Comme au n° 83, nous regarderons comme appartenant au premier parallélogramme tous les points intérieurs, et tous les points situés sur le premier et le quatrième côté, sauf les points $2\omega_1$, $2\omega_3$. Nous adopterons des conventions analogues pour le parallélogramme dont les sommets sont

$$u, \quad u + 2\omega_1, \quad u + 2\omega_1 + 2\omega_3, \quad u + 2\omega_3,$$

qui sera dit *parallélogramme des périodes relatif au point* u; tous les points $u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ sont dits *congruents;* supposons en particulier que le point u appartienne au premier parallélogramme, tous les points congruents sont situés, par rapport aux divers parallélogrammes du réseau qui les contiennent respectivement, de la même façon que le point u par rapport au premier parallélogramme. Étant donné un point quelconque u' du plan, il existe un point u appartenant au premier parallélogramme et congruent au point u'; l'affixe de u est la *valeur réduite* de u'.

Dans le langage de l'Arithmétique, on dit que les nombres u et u' sont *congrus* par rapport au système de modules $2\omega_1$, $2\omega_3$, ou encore, congrus *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$, si l'on a, en désignant par m et n des nombres entiers,

$$u' = u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

et l'on écrit

$$u' \equiv u\,[\text{modd.}\ 2\omega_1, 2\omega_3]$$ (1).

87. Nous allons maintenant nous occuper du problème posé à la fin du Chapitre précédent, de la construction d'une fonction transcendante entière admettant comme zéros simples tous les nombres $2m\omega_1 + 2n\omega_3$, en désignant toujours par m, n des entiers positifs, nuls ou négatifs.

La série à double entrée

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^\alpha}$$

étant absolument convergente (n° 18) lorsque α est un entier plus grand que deux, on voit que la fonction cherchée est une fonction transcendante entière de genre *deux*. Pour la construire, il faudra donc, d'après le théorème de M. Weierstrass (n° 71),

---

(1) La notation un peu singulière *modd.* a été proposée par Gauss (*Werke*, t. II, *Nachlass*, p. 239); elle a été adoptée et est employée couramment par M. Kronecker et ses élèves, pour distinguer les congruences suivant un système de modules des congruences suivant un seul module. Cette même notation est adoptée en Algèbre par M. Kronecker dans un sens bien plus général. (Voir *Arithmetische Theorie der algebraischen Grössen*, *Festschrift* et les *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, surtout depuis 1886.)

prendre pour facteurs primaires les quantités

$$\left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_3}\right)e^{\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_3}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(2m\omega_1+2n\omega_3)^2}}\right\},$$

dans chacune desquelles, nous le rappelons encore une fois, les deux facteurs doivent être regardés comme liés indissolublement. Le produit infini à double entrée

$$\prod_s{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\},$$

où s doit être remplacé par les diverses valeurs que prend l'expression

$$2m\omega_1+2n\omega_3,$$

quand on y met à la place de m, n les différents nombres entiers, positifs, nuls ou négatifs, à l'exclusion de la combinaison $m=0$, $n=0$, est alors absolument convergent quel que soit u. Il jouit de toutes les propriétés que nous avons rappelées au n° 79.

Il en est de même du produit infini à double entrée

$$u\prod_s{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\}$$

qui admet pour zéros simples toutes les valeurs de s et n'admet pas d'autres zéros. En disant, ici et plus loin, toutes les valeurs de s, nous entendons toutes les valeurs précédemment définies, *et en outre la valeur* 0; en d'autres termes, toutes les valeurs que peut prendre l'expression $2m\omega_1+2n\omega_3$ quand m et n sont des entiers quelconques.

C'est cette dernière fonction transcendante entière que nous désignerons par

$$\sigma u$$

ou, quand nous voudrons mettre les périodes dont on part, en évidence, par

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

Alors, toute fonction transcendante entière admettant les mêmes

zéros simples, et n'en admettant pas d'autres, est de la forme

$$e^{g(u)}\,\sigma u,$$

où $g(u)$ désigne une fonction entière quelconque.

88. On a donc, par définition,

$$(\mathrm{II}_1)\qquad \sigma u = u\prod_s{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\}.$$

En prenant la dérivée logarithmique du produit infini à double entrée, comme s'il s'agissait du produit d'un nombre fini de facteurs, on obtient une série à double entrée

$$\frac{1}{u}+\sum_s{}^{(\prime)}\left\{\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right\}$$

qui représente (n° 71) la dérivée logarithmique $\dfrac{\sigma' u}{\sigma u}$ de la fonction σu; les éléments d'un même terme

$$\left\{\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right\}$$

doivent être considérés comme liés indissolublement.

Les pôles de la fonction $\dfrac{\sigma' u}{\sigma u}$ que cette série représente sont ici bien en évidence : ce sont tous les points s; ce sont des pôles simples. Nous désignerons, par ζu, la fonction $\dfrac{\sigma' u}{\sigma u}$ ainsi engendrée de σu. Lorsque nous voudrons mettre en évidence les nombres ω_1, ω_3 au moyen desquels elle est formée, nous écrirons

$$\zeta(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

On a donc

$$(\mathrm{II}_2)\qquad \zeta(u)=\frac{d}{du}\log\sigma u=\frac{1}{u}+\sum_s{}^{(\prime)}\left\{\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right\}.$$

La fonction ζu engendre elle-même, par différentiation, une fonction $-\zeta' u$ qui est représentée par la série à double entrée

$$\frac{1}{u^2}+\sum_s{}^{(\prime)}\left\{\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\},$$

obtenue en différentiant, terme par terme, la série qui représente $-\zeta u$. Les éléments d'un même terme

$$\left\{\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\}$$

doivent toujours être regardés comme liés indissolublement.

Les pôles de la fonction $-\zeta' u$ sont bien en évidence : ce sont tous les points s ; ce sont des pôles doubles. Nous désignerons par pu ou, si l'on veut, par $p(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$, cette fonction $-\zeta' u$ engendrée de ζu et, par suite, de σu.

On a donc

$$(\mathrm{II}_3)\qquad pu = -\zeta' u = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma u = \frac{1}{u^2}+\sum_s{}^{(\prime)}\left\{\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\}.$$

De même pu engendre par différentiation une fonction $p' u$ qui est représentée par la série à double entrée

$$-\frac{2}{u^3}-2\sum_s{}^{(\prime)}\frac{1}{(u-s)^3}=-2\sum_s\frac{1}{(u-s)^3}$$

obtenue en différentiant, terme par terme, la série qui représente pu. Les pôles de $p' u$ sont bien en évidence : ce sont tous les points s ; ce sont des pôles triples.

On a donc

$$(\mathrm{II}_4)\qquad -\frac{1}{2}p' u = \sum_s\frac{1}{(u-s)^3}$$

où la somme est étendue à toutes les valeurs $s = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, y compris zéro.

89. Les propriétés qui suivent se lisent immédiatement sur les formules (II_{1-4}).

La fonction σu est impaire. En effet, à chaque valeur de s, non nulle, correspond évidemment une valeur égale et de signe contraire, en sorte que, au facteur

$$\left\{\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\},$$

correspond le facteur

$$\left\{\left(1+\frac{u}{s}\right)e^{-\frac{u}{s}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\},$$

et ces deux facteurs se permutent l'un dans l'autre quand on change u en $-u$.

Il en résulte immédiatement que ζu est aussi une fonction impaire, pu une fonction paire et $p'u$ une fonction impaire; cela se voit d'ailleurs aussi sur les formules (II_{2-4}).

On a encore immédiatement, quel que soit le nombre α différent de zéro,

$$(\mathrm{III})\quad\left\{\begin{aligned}
&(1)\quad \sigma(\alpha u \mid \alpha\omega_1, \alpha\omega_3) = \alpha\, \sigma(u \mid \omega_1, \omega_3),\\
&(2)\quad \zeta(\alpha u \mid \alpha\omega_1, \alpha\omega_3) = \frac{1}{\alpha}\, \zeta(u \mid \omega_1, \omega_3),\\
&(3)\quad p(\alpha u \mid \alpha\omega_1, \alpha\omega_3) = \frac{1}{\alpha^2}\, p(u \mid \omega_1, \omega_3).
\end{aligned}\right.$$

90. Soit δ la distance du point o au plus rapproché des sommets s du réseau de parallélogrammes.

Si l'on a $|u| < \delta$, on peut écrire

$$\frac{1}{u-s} = -\frac{1}{s}\,\frac{1}{1-\frac{u}{s}} = -\left[\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}+\ldots+\frac{u^n}{s^{n+1}}+\ldots\right];$$

donc, en remplaçant dans l'expression de ζu chaque terme qui figure sous le signe $\sum^{(\prime)}$ par

$$-\left[\frac{u^2}{s^3}+\frac{u^3}{s^4}+\ldots+\frac{u^n}{s^{n+1}}+\ldots\right],$$

et en ordonnant ensuite, ce qui est permis (n° 38), on aura, sous la seule condition $|u| < \delta$,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - u^2 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^3} - u^3 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - \ldots - u^n \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^{n+1}} - \ldots.$$

ou, en tenant compte de ce que, dans les sommes de la forme

$$\sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^{2n+1}},$$

les termes se détruisent manifestement deux à deux,

$$(\text{IV}_2)\qquad \zeta u = \frac{1}{u} - u^3 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - u^5 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} - u^7 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^8} - \ldots.$$

En intégrant par rapport à u, on a

$$\int \zeta u\, du = C + \log u - \frac{u^4}{4} \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - \frac{u^6}{6} \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} - \ldots,$$

C étant la constante d'intégration et la détermination de $\log u$ dépendant du chemin d'intégration. On aura donc

$$\sigma u = e^{\int \zeta u du} = e^C \times u \times e^{-\frac{1}{4} u^4 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - \ldots}.$$

La constante C doit être prise égale à zéro, afin que le rapport $\dfrac{\sigma u}{u}$ ait pour limite l'unité quand u tend vers zéro, ce que la formule (II_1) exige manifestement. En remplaçant

$$e^{-\frac{1}{4} u^4 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - \frac{1}{6} u^6 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} - \ldots}$$

par le développement en série entière en u,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} u^4 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - \frac{1}{6} u^6 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} \\ - \frac{1}{8} u^8 \left[\sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^8} - \frac{1}{4} \left(\sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} \right)^2 \right] - \ldots, \end{aligned}$$

on voit que σu peut se mettre sous la forme

$$(\text{IV}_1)\qquad \sigma u = u - \frac{1}{4} u^5 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - \frac{1}{6} u^7 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} - \ldots.$$

Ce développement est valable quel que soit u ; il n'a, à la vérité, été établi que sous la condition $|u| < \delta$; mais, comme la fonction σu peut être mise sous la forme d'une série entière en u, partout convergente, et que cette série doit coïncider avec la série (IV_1) pour toutes les valeurs de u qui satisfont à la condition précédente,

elle coïncide nécessairement (n° 36) avec cette même série, quel que soit u.

On remarquera que le terme en u^3 manque dans le développement de σu.

D'un autre côté, en différentiant par rapport à u la relation (IV_2), on trouve la formule suivante, que l'on aurait aussi bien pu déduire de la définition de pu,

$$(\mathrm{IV}_3) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} + 5u^4 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} + \dots$$

Cette formule sera valable tant que l'on aura $|u| < \delta$; si cette condition n'est pas vérifiée, le second membre n'est pas convergent.

En différentiant encore une fois, on trouve

$$(\mathrm{IV}_4) \qquad p'u = -\frac{2}{u^3} + 6u \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} + 20u^3 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} + \dots$$

La méthode précédente permet sans doute de calculer autant de termes que l'on voudra dans le développement en séries de σu, ζu, pu; mais elle ne permet pas de trouver la loi de formation de ces séries. Ce n'est qu'après avoir obtenu des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire ces fonctions que l'on peut établir cette loi. Il convient toutefois de signaler dès maintenant ce fait important que les coefficients des séries (IV_{1-4}) sont des polynomes entiers à coefficients rationnels par rapport aux deux nombres

$$(\mathrm{IV}_5) \qquad g_2 = 60 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6}.$$

Les nombres g_2 et g_3 ont reçu le nom d'*invariants,* qui sera justifié plus tard.

91. La formule (II_1) peut être transformée comme l'a été la formule analogue pour $\sin \pi x$ dans le n° 79. En désignant par a un nombre assujetti seulement à ne pas être égal à l'une des valeurs de s, on aura, en remplaçant dans (II_1) u par $u + a$,

$$\frac{\sigma(u+a)}{u+a} = \prod_s^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{u+a}{s}\right) e^{\frac{u+a}{s} + \frac{1}{2}\frac{(u+a)^2}{s^2}} \right\}.$$

Or le facteur primaire, qui figure sous le signe $\prod^{(\prime)}$, peut être regardé comme le produit des trois quantités

$$\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{s-a}\right)^2},$$

$$\left(1-\frac{a}{s}\right)e^{\frac{a}{s}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{s^2}},$$

$$e^{u\left[\frac{1}{a-s}+\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right]-\frac{u^2}{2}\left[\frac{1}{(a-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right]},$$

et, à cause de la convergence manifeste de chacun des trois produits infinis dont les facteurs s'obtiennent respectivement en donnant à s, dans les expressions précédentes, toutes les valeurs dont ce symbole est susceptible, sauf la valeur zéro, il est clair que $\dfrac{\sigma(u+a)}{u-a}$ est égal au produit de ces trois produits infinis.

Le dernier d'entre eux est égal à une puissance de e dont l'exposant est

$$u\sum_s^{(\prime)}\left\{\frac{1}{a-s}+\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right\}-\frac{u^2}{2}\sum_s^{(\prime)}\left\{\frac{1}{(a-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\};$$

mais, en vertu des formules (II_2) et (II_3), on a

$$\sum_s^{(\prime)}\left\{\frac{1}{a-s}+\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right\}=\zeta a-\frac{1}{a},$$

$$\sum_s^{(\prime)}\left\{\frac{1}{(a-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\}=\wp a-\frac{1}{a^2}.$$

D'autre part, le second des produits infinis est, en vertu de la formule (II_1), égal à

$$\frac{\sigma a}{a}.$$

On a donc

$$\frac{\sigma(u-a)}{u+a}=\frac{\sigma a}{a}e^{u\left[\zeta a-\frac{1}{a}\right]-\frac{u^2}{2}\left[\wp a-\frac{1}{a^2}\right]}$$
$$\times\prod_s^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}\right\}.$$

En faisant rentrer parmi les facteurs du produit infini le facteur

$$\left\{\left(1+\frac{u}{a}\right)e^{-\frac{u}{a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2}}\right\},$$

qui n'est autre chose que le facteur général qui figure sous le signe $\prod^{(\prime)}$, dans lequel on supposerait $s=0$, on aura finalement

$$(\mathrm{V}_1)\qquad \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)}e^{-u\zeta a+\frac{u^2}{2}pa}=\prod_s\left\{\left(1-\frac{u}{s-a}\right)e^{\frac{u}{s-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}}\right\},$$

où s doit prendre toutes les valeurs, sans exception, que l'on obtient en remplaçant, dans l'expression $2m\omega_1+2n\omega_3$, m et n par tous les nombres entiers, positifs, nuls ou négatifs.

En prenant les dérivées logarithmiques, par rapport à u, des deux membres de l'équation précédente, on tombera sur la formule

$$(\mathrm{V}_2)\qquad \zeta(u+a)-\zeta a+upa=\sum_s\left\{\frac{1}{u+a-s}-\frac{1}{a-s}+\frac{u}{(a-s)^2}\right\}.$$

Et, en prenant les dérivées par rapport à u dans les deux membres de cette dernière égalité, on a

$$(\mathrm{V}_3)\qquad p(u+a)-pa=\sum_s\left\{\frac{1}{(u+a-s)^2}-\frac{1}{(a-s)^2}\right\}.$$

Ces deux égalités se déduiraient tout aussi bien des formules (II_2) et (II_3).

92. Les égalités (V) ont ceci de très remarquable que les quantités qui figurent dans les seconds membres ne changent manifestement pas quand on y remplace a par $a+s$, où s est l'une quelconque des valeurs que peut prendre $2m\omega_1+2n\omega_3$. Il est clair, en effet, que, par ce changement, l'ordre des facteurs ou des termes qui figurent dans le produit infini ou dans les séries est seul modifié. Ainsi, considérés comme des fonctions de a, les premiers membres sont des fonctions doublement périodiques à périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Voici quelques conséquences essentielles qui résultent de cette remarque et dont nous empruntons la déduction à Halphen [1] :

1° On a

$$p(u+a+s)-p(a+s)=p(u+a)-p(a),$$

d'où, en remplaçant u par $b-a$,

$$p(b+s)-p(b)=p(a+s)-p(a);$$

on voit donc que les deux membres sont égaux à une constante, indépendante de a et de b. Pour déterminer cette constante, supposons d'abord que les deux entiers m et n ne soient pas tous deux pairs, en sorte que $\frac{1}{2}s$ ne soit pas un des nombres exclus pour a; posons alors $a=-\frac{s}{2}$ et rappelons-nous que p est une fonction paire; on voit que la constante cherchée est alors nulle.

On a donc, en particulier, pour $m=1$, $n=0$ et pour $m=0$, $n=1$,

$$p(u+2\omega_1)=pu, \qquad p(u+2\omega_3)=pu,$$

et, par conséquent, quels que soient les entiers m et n,

$$p(u+2m\omega_1+2n\omega_3)=pu. \tag{VI$_5$}$$

2° On a de même, en conservant les mêmes notations,

$$\zeta(u+a+s)-\zeta(a+s)+up(a+s)=\zeta(u+a)-\zeta a+upa.$$

En réduisant, au moyen de l'égalité précédente et en posant $u=b-a$, il vient

$$\zeta(b+s)-\zeta b=\zeta(a+s)-\zeta a.$$

Ici encore les deux membres sont donc égaux à une constante indépendante de a et de b. Pour la déterminer, dans le cas où m et n ne sont pas pairs simultanément, posons $a=-\frac{s}{2}$, ce qui est alors permis; rappelons-nous aussi que la fonction ζ est impaire, et nous aurons alors, pour la valeur de cette constante,

$$2\zeta\left(\frac{s}{2}\right).$$

---

[1] *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 367.

En particulier, pour $m=1$, $n=0$, pour $m=-1$, $n=-1$ et pour $m=0$, $n=1$, on a

$$\begin{aligned}
\zeta(a+2\omega_1) &= \zeta a + 2\zeta\omega_1,\\
\zeta(a+2\omega_2) &= \zeta a + 2\zeta\omega_2,\\
\zeta(a+2\omega_3) &= \zeta a + 2\zeta\omega_3,
\end{aligned}$$

où le nombre ω_2 est défini par la relation

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$$

et est introduit pour des raisons de symétrie dont le lecteur s'apercevra bientôt.

On en déduit

$$\begin{aligned}
\zeta a &= \zeta(a-2\omega_2)+2\zeta\omega_2 = \zeta(a+2\omega_1+2\omega_3)+2\zeta\omega_2\\
&= \zeta(a+2\omega_1)+2\zeta\omega_3+2\zeta\omega_2 = \zeta a + 2[\zeta\omega_1+\zeta\omega_2+\zeta\omega_3],
\end{aligned}$$

de sorte que l'on a

$$\zeta\omega_1+\zeta\omega_2+\zeta\omega_3=0.$$

On pose habituellement

$$(\mathrm{VI}_4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\zeta\omega_1 &= \eta_1,\\
\zeta\omega_2 &= \eta_2,\\
\zeta\omega_3 &= \eta_3,
\end{aligned}\right.$$

en sorte que la relation précédente peut s'écrire

$$(\mathrm{VI}_4\ bis)\qquad \eta_1+\eta_2+\eta_3=0$$

et que l'on a, en écrivant u au lieu de a,

$$\zeta(u+2\omega_\alpha)=\zeta u+2\eta_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3);$$

donc aussi, par répétition, quels que soient les entiers m et n,

$$(\mathrm{VI}_3)\qquad \zeta(u+2m\omega_1+2n\omega_3)=\zeta u+2m\eta_1+2n\eta_3.$$

3° Enfin, on a, en conservant toujours les mêmes notations,

$$\frac{\sigma(u+a+s)}{\sigma(a+s)}e^{-u\zeta(a+s)+\frac{u^2}{2}p(a+s)} = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma a}e^{-u\zeta a+\frac{u^2}{2}p a}.$$

En réduisant, au moyen des égalités précédentes, il vient

$$\frac{\sigma(u+a+s)}{\sigma(a+s)}e^{-u(2m\eta_1+2n\eta_3)} = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma a}$$

et, en remplaçant u par $b - a$,

$$\frac{\sigma(b+s)}{\sigma b} e^{-b(2m\eta_1+2n\eta_3)} = \frac{\sigma(a+s)}{\sigma a} e^{-a(2m\eta_1+2n\eta_3)}.$$

Ici, encore, les deux membres sont égaux à une constante indépendante de a et de b, et, si m, n ne sont pas tous deux pairs, on déterminera cette constante en posant

$$a = -\frac{s}{2} = -(m\omega_1 + n\omega_3),$$

ce qui est alors permis. On obtient, dans ce cas, pour cette constante, la valeur

$$-e^{(m\omega_1+n\omega_3)(2m\eta_1+2n\eta_3)};$$

on a donc, pourvu que l'un des deux entiers m, n soit impair,

$$\sigma(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = -e^{(2m\eta_1+2n\eta_3)(u+m\omega_1+n\omega_3)}\sigma u$$

et, en particulier,

$$(\mathrm{VI}_1) \qquad \begin{cases} \sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\sigma u. \end{cases}$$

La première de ces trois égalités, par répétition, donne

$$\sigma(u+2m\omega_1) = (-1)^m e^{2\eta_1(mu+m^2\omega_1)},$$

de même

$$\sigma(u+2n\,\omega_3) = (-1)^n\, e^{2\eta_3(nu+n^2\omega_3)};$$

en remplaçant, dans l'avant-dernière égalité, u par $u + 2n\omega_3$ et en tenant compte de la dernière, il vient

$$\sigma(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = (-1)^{m+n}\, e^{\mathrm{A}}\,\sigma u,$$

sans qu'ici l'on ait à exclure le cas où m et n seraient pairs à la fois; on a posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 2\eta_1[m(u+2n_3\omega_3) + m^2\omega_1] + 2\eta_3[nu + n^2\omega_3] \\ &= (2m\eta_1 + 2n\eta_3)(u + m\omega_1 + n\omega_3) + 2mn(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1). \end{aligned}$$

En échangeant m, ω_1, η_1 et n, ω_3, η_3, on aurait de même

$$\sigma(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = (-1)^{m+n}\, e^{\mathrm{B}}\,\sigma u,$$

où

$$B = (2m\eta_1 + 2n\eta_3)(u + m\omega_1 + n\omega_3) - 2mn(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1).$$

Il faut que l'on ait $e^A = e^B$ et, par suite, que

$$4mn(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1)$$

soit un multiple entier de $2\pi i$, quels que soient les entiers m, n. Si, en particulier, on prend $m = 1$, $n = 1$, on voit que

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1$$

est un multiple entier de $\frac{\pi i}{2}$. On peut ajouter que c'est un multiple impair, puisqu'on doit avoir à la fois

$$\sigma(u + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma u,$$
$$\sigma(u + 2\omega_2) = e^A \sigma u,$$

où

$$A = 2\eta_2(u + \omega_2) + 2(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1),$$

ce qui implique

$$e^{2(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1)} = -1.$$

On prouvera plus tard (nº 108) que l'on a

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pm\frac{\pi i}{2}$$

suivant que le coefficient de i dans $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est positif ou négatif.

Quoi qu'il en soit, dans le seul cas d'abord exclu, celui où m et n sont pairs à la fois, la quantité

$$2mn(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1)$$

sera un multiple de $2\pi i$, et l'on aura, dans ce cas,

$$e^{2mn(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1)} = 1,$$
$$\sigma(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = e^{(2m\eta_1 + 2n\eta_3)(u + m\omega_1 + n\omega_3)}\sigma u.$$

On a donc, dans tous les cas,

$$(\mathrm{VI}_2) \quad \sigma(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = (-1)^{mn+m+n} e^{(2m\eta_1 + 2n\eta_3)(u + m\omega_1 + n\omega_3)}\sigma u.$$

93. Ajoutons encore que, de la double périodicité de pu, on

déduit immédiatement celle de toutes ses dérivées $p'u$, $p''u$, ... On a donc

$$(\mathrm{VI}_6) \qquad p'(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = p'u.$$

Si l'on fait dans cette formule $u = -\omega_1$, $m = 1$, $n = 0$, on a

$$p'\omega_1 = p'(-\omega_1);$$

d'ailleurs, puisque la fonction pu est paire, la fonction $p'u$ est impaire; on a donc

$$p'\omega_1 = -p'\omega_1 = 0,$$

puisque ω_1 n'est pas un pôle de $p'u$. De même $p'\omega_2 = 0$, $p'\omega_3 = 0$: ainsi

$$(\mathrm{VI}_6\ bis) \qquad p'\omega_\alpha = 0.$$

Le lecteur retrouvera immédiatement ces résultats sur l'égalité

$$-\frac{1}{2}p'u = \sum_s \frac{1}{(u-s)^3}$$

qui donne, par exemple,

$$\frac{1}{2}p'\omega_1 = \sum_{m,n} \frac{1}{[(2m-1)\omega_1 + 2n\omega_3]^3};$$

il est manifeste que le second membre est composé de termes égaux et de signes contraires qui se détruisent deux à deux. On verra de même que les dérivées d'ordre impair de la fonction pu s'annulent pour $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$. La formule ($\mathrm{VI}_6$ *bis*) pour $\alpha = 1, 2, 3$ se trouve ainsi établie à nouveau.

La périodicité de $p'u$ est d'ailleurs mise directement en évidence par la formule

$$-\frac{1}{2}p'u = \sum_s \frac{1}{(u-s)^3},$$

car le second membre ne change évidemment pas quand on change u en $u + 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega_3$, où m_1 et n_1 sont deux entiers déterminés quelconques : dire que l'indice s prend toutes les valeurs $2m\omega_1 + 2n\omega_3$ ou dire que $s - 2m_1\omega_1 - 2n_1\omega_3$ prend toutes les valeurs $2m\omega_1 + 2n\omega_3$, c'est, en effet, dire exactement la même chose, et la somme double étant absolument convergente,

on peut, sans changer sa valeur, intervertir à volonté l'ordre de ses termes.

De la périodicité de $p'u$ ainsi établie directement, on aurait pu déduire celle de pu et, par suite, les formules établies plus haut pour $\zeta(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3)$ et $\sigma(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3)$. En effet, de l'égalité

$$p'(u + 2\omega_1) = p'u,$$

par exemple, on déduit, en intégrant,

$$p(u + 2\omega_1) = pu + c,$$

où c est une constante; si l'on pose $u = -\omega_1$, cette dernière formule devient

$$p\omega_1 = p(-\omega_1) + c;$$

on en conclut que $c = 0$, car pu est une fonction paire et ω_1 n'est pas un pôle de pu.

De même, la relation

$$p(u + 2\omega_1) = pu$$

donne, en intégrant,

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + c;$$

c est encore la constante d'intégration, dont on trouve la valeur $2\zeta\omega_1$, en supposant $u = -\omega_1$ et en se rappelant que ζu est une fonction impaire. Enfin, en intégrant l'équation différentielle

$$\frac{\sigma'(u + 2\omega_1)}{\sigma(u + 2\omega_1)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta_1,$$

on trouve

$$\sigma(u + 2\omega_1) = e^{\eta_1(u+c)}\sigma(u),$$

et l'on trouve $c = \omega_1$ en supposant encore $u = -\omega_1$.

Ajoutons que les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ constituent un couple de périodes *primitives* pour la fonction pu; en effet, puisque o est un pôle de cette fonction, toute période de pu doit aussi être un pôle; or la série qui définit pu montre qu'il n'y a pas d'autres pôles que les nombres s congrus à zéro, *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Le parallélogramme que nous avons désigné comme *premier* peut donc aussi être désigné sous le nom de *primitif*.

Nous avons ainsi établi, sur leur définition même, quelques-unes des propriétés fondamentales des fonctions σu, ζu, pu.

II. — Premières relations entre les fonctions σu, ζu, $p u$, $p' u$.

94. Nous allons maintenant faire une courte digression pour établir entre ces fonctions quelques relations plus cachées, mais de la plus haute importance. A la vérité, nous aurons occasion plus tard de retrouver ces relations par une voie peut-être plus naturelle, et comme conséquence immédiate de l'application aux fonctions doublement périodiques du théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales de fonctions d'une variable imaginaire prises le long d'un contour, mais il nous sera commode, quand nous continuerons l'étude directe de la fonction σ, d'avoir ces relations, afin de pouvoir écrire nos formules sous une forme plus définitive; les nombreuses propositions de la théorie des fonctions elliptiques, d'une part, se groupent, comme le verra le lecteur, autour d'un petit nombre de principes, et, de l'autre, se pénètrent mutuellement : la digression que nous allons faire évitera des répétitions et des renvois fatigants; elle aura d'ailleurs l'avantage de montrer immédiatement au lecteur le lien des fonctions que nous venons d'introduire, d'après M. Weierstrass, avec des questions qui lui sont certainement familières.

C'est tout d'abord une relation, analogue à la formule

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 a} = \frac{\sin(a+x)\sin(a-x)}{\sin^2 x \sin^2 a},$$

que nous allons établir. La fonction σu joue, à certains égards, le même rôle que la fonction

$$\frac{\sin \pi x}{\pi},$$

dont la dérivée logarithmique admet pour dérivée

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x},$$

de même que la dérivée de la dérivée logarithmique de σu est $-p u$.

Les deux fonctions de u

$$p u - p a, \quad \frac{\sigma(a+u)\sigma(a-u)}{\sigma^2 a \, \sigma^2 u}$$

se rapprochent naturellement l'une de l'autre; tout d'abord, elles sont toutes les deux doublement périodiques, avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, ainsi qu'il résulte, pour la seconde, de la formule (VI_1), qui montre que, si l'on remplace u par $u+2\omega_\alpha$, le produit $\sigma(u+a)\sigma(u-a)$ se reproduit multiplié par le facteur

$$e^{2\eta_\alpha(u+a+\omega_\alpha)} \times e^{2\eta_\alpha(u-a+\omega_\alpha)} = [e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}]^2,$$

exactement comme $\sigma^2 u$. D'ailleurs, des deux fonctions considérées, la première $pu - pa$ s'annule pour toutes les valeurs qui annulent le numérateur de la seconde, et, ce qui importe surtout dans la démonstration qui va suivre, les *pôles* des deux fonctions sont les mêmes avec les mêmes ordres de multiplicité; ce sont les nombres s, qui tous sont des pôles doubles pour les deux fonctions; aux environs du pôle o, la fonction $pu - pa$ se présente sous la forme

$$\frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u);$$

d'un autre côté, le produit $\sigma(a+u)\sigma(a-u)$ est le produit des deux séries

$$\sigma a + \frac{u}{1}\sigma' a + \frac{u^2}{1.2}\sigma'' a + \ldots,$$

$$\sigma a - \frac{u}{1}\sigma' a + \frac{u^2}{1.2}\sigma'' a + \ldots;$$

les premiers termes de son développement suivant les puissances de u sont donc

$$\sigma^2 a - u^2(\sigma'^2 a - \sigma a\, \sigma'' a) + \ldots;$$

d'ailleurs le développement de $\sigma^2 u$ commence par un terme en u^2, avec le coefficient un, puisque celui de σu commence par le terme u : on a donc, dans le voisinage du pôle o,

$$\frac{\sigma(a+u)\sigma(a-u)}{\sigma^2 a\, \sigma^2 u} = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u);$$

par conséquent, la différence

$$pu - pa - \frac{\sigma(a+u)\sigma(a-u)}{\sigma^2 a\, \sigma^2 u}$$

est régulière aux environs du point o; comme c'est une fonction

doublement périodique, qui admet pour période l'un quelconque des nombres s, qui ne peut pas avoir d'autres pôles que ces nombres, et que tout se passe autour de ces points comme autour du point o, il est clair qu'elle est régulière en tout point à distance finie; c'est donc, en vertu du théorème fondamental de Liouville, une constante, et cette constante est nulle, comme on s'en assure en supposant $u = a$; on a donc

$$(\mathrm{VII}_1) \qquad pu - pa = -\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a};$$

c'est la première relation que nous voulions établir.

95. Elle montre tout d'abord que l'équation

$$pu - pa = 0$$

n'admet pas d'autres solutions que celles des équations

$$\sigma(u+a) = 0, \qquad \sigma(u-a) = 0,$$

c'est-à-dire que les valeurs de u données par la formule

$$u = \pm a + s = \pm a + 2m\omega_1 + 2n\omega_3;$$

on déduit de là sans peine une seconde démonstration de ce que $2\omega_1$, $2\omega_3$ constituent un couple de périodes primitives pour la fonction doublement périodique pu.

Remarquons encore que les trois nombres $p\omega_1$, $p\omega_2$, $p\omega_3$, qui joueront dans la théorie un rôle essentiel et que nous désignerons respectivement par e_1, e_2, e_3, sont différents; si l'on avait, par exemple,

$$p\omega_1 = p\omega_2,$$

on devrait avoir

$$\pm\omega_1 \equiv \omega_1 + \omega_3 \quad (\text{modd. } 2\omega_1, 2\omega_3);$$

or ces congruences entraînent toutes deux la suivante

$$\omega_3 \equiv 0 \quad (\text{modd. } 2\omega_1, 2\omega_3),$$

qui est impossible.

96. La relation (VII_1) conduit immédiatement à une relation

très importante, qui résulte de l'identité évidente

$$(B - C)(D - A) + (C - A)(D - B) + (A - B)(D - C) = 0.$$

En désignant par a, b, c, u des nombres quelconques dont nous supposerons d'abord qu'aucun n'est congru à zéro *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$ et en posant

$$A = pa, \qquad B = pb, \qquad C = pc, \qquad D = pu,$$

on a

$$\begin{aligned}(pu - pa)(pb - pc) + (pu - pb)(pc - pa)\\ + (pu - pc)(pa - pb) = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant les quantités $pu - pa$, $pb - pc$, ... par

$$-\frac{\sigma(u + a)\sigma(u - a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a}, \quad -\frac{\sigma(b + c)\sigma(b - c)}{\sigma^2 b\,\sigma^2 c}, \quad \ldots$$

et multipliant par $\sigma^2 u\,\sigma^2 a\,\sigma^2 b\,\sigma^2 c$, il vient

$$(\mathrm{VII}_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma(u + a)\sigma(u - a)\sigma(b + c)\sigma(b - c)\\ &+ \sigma(u + b)\sigma(u - b)\sigma(c + a)\sigma(c - a)\\ &+ \sigma(u + c)\sigma(u - c)\sigma(a + b)\sigma(a - b) = 0.\end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette égalité, étant évidemment une fonction continue des quantités u, a, b, c et restant nul lorsque quelqu'une de ces quantités s'approche de l'un des nombres congrus à zéro *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$, est nécessairement nul encore lorsqu'on atteint cette limite. L'égalité (VII_2) a donc lieu, quels que soient les nombres u, a, b, c.

Cette belle identité offre ceci de remarquable qu'elle caractérise la fonction σu; d'une façon plus précise, il n'existe pas d'autre fonction transcendante entière que la fonction σu dont la dérivée se réduise à 1 pour $u = 0$ et qui jouisse de la propriété qu'exprime l'égalité (VII_2); nous renverrons pour la démonstration de ce théorème, dont nous ne ferons pas usage, au *Traité des fonctions elliptiques* de Halphen, t. I, p. 187.

97. En prenant la dérivée logarithmique des deux membres de la formule (VII_1), successivement par rapport à u et par rapport

à a, on obtient les relations

$$\frac{p'u}{pu - pa} = \zeta(a+u) - \zeta(a-u) - 2\zeta u,$$

$$\frac{-p'a}{pu - pa} = \zeta(a+u) + \zeta(a-u) - 2\zeta a,$$

qui, par addition et soustraction, donnent

$$\frac{p'u \mp p'a}{pu - pa} = 2\zeta(u \pm a) - 2\zeta u \mp 2\zeta a,$$

formule que l'on écrit habituellement

$$(\mathrm{VII}_3) \qquad \zeta(u \pm a) = \zeta(u) \pm \zeta a + \frac{1}{2}\,\frac{p'u \mp p'a}{pu - pa},$$

et qui porte le nom de *formule d'addition* de la fonction ζ. On a, en particulier,

$$\zeta(u \pm \omega_\alpha) = \zeta u \pm \eta_\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - p\omega_\alpha}.$$

En prenant la dérivée, par rapport à u, de la relation (VII_3), on obtient de même la *formule d'addition* relative à la fonction pu

$$(\mathrm{VII}_3\ bis) \qquad p(u \pm a) = pu - \frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\left[\frac{p'u \mp p'a}{pu - pa}\right].$$

Dans ces formules, les signes supérieurs se correspondent.

98. Nous allons encore déduire de la relation (VII_1) une relation entre pu et sa dérivée $p'u$, qui nous amènera, dans un instant, à ce fait capital que la fonction pu vérifie une équation différentielle très simple du premier ordre.

On peut écrire la relation (VII_1)

$$\frac{pu - pa}{u - a} = -\frac{\sigma(u+a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a}\,\frac{\sigma(u-a)}{u-a};$$

en faisant tendre u vers a et passant à la limite pour $u = a$, on a donc, quel que soit a,

$$p'a = -\frac{\sigma(2a)}{\sigma^4 a}.$$

Or la formule (II_1), si l'on y remplace u par $2u$, devient

$$\sigma(2u) = 2u\prod{}^{(\prime)}\left\{\left(1-\frac{u}{m\omega_1+n\omega_3}\right)e^{\frac{u}{m\omega_1+n\omega_3}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(m\omega_1+n\omega_3)^2}}\right\};$$

groupons les facteurs où m, n sont pairs, ceux où m est impair et n pair, ceux où m est pair et n impair, ceux où m et n sont impairs; en tenant compte de la formule (V_1), qui donne, pour $a=\omega_\alpha$,

$$\prod_s\left\{\left(1-\frac{u}{s-\omega_\alpha}\right)e^{\frac{u}{s-\omega_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-\omega_\alpha)^2}}\right\} = \frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha}e^{-u\eta_\alpha+\frac{u^2}{2}p\omega_\alpha},$$

et en tenant compte aussi de la relation $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$, nous obtiendrons, pour la valeur de $\sigma(2u)$, l'expression

$$2\sigma u\,\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma\omega_1}\,\frac{\sigma(u+\omega_2)}{\sigma\omega_2}\,\frac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma\omega_3}\,e^{\frac{u^2}{2}(p\omega_1+p\omega_2+p\omega_3)}.$$

On a donc

$$p'u = -2\,\frac{\sigma(\omega_1+u)}{\sigma\omega_1\,\sigma u}\,\frac{\sigma(\omega_2+u)}{\sigma\omega_2\,\sigma u}\,\frac{\sigma(\omega_3+u)}{\sigma\omega_3\,\sigma u}\,e^{\frac{u^2}{2}(p\omega_1+p\omega_2+p\omega_3)}$$

et, par suite, en changeant u en $-u$ et en remarquant que les fonctions σ et p' sont impaires,

$$p'u = -2\,\frac{\sigma(\omega_1-u)}{\sigma\omega_1\,\sigma u}\,\frac{\sigma(\omega_2-u)}{\sigma\omega_2\,\sigma u}\,\frac{\sigma(\omega_3-u)}{\sigma\omega_3\,\sigma u}\,e^{\frac{u^2}{2}(p\omega_1+p\omega_2+p\omega_3)}.$$

En multipliant ces deux égalités l'une par l'autre et en tenant compte de l'égalité (VII_1) pour $a=\omega_\alpha$, on a enfin

$$p'^2u = 4(pu-p\omega_1)(pu-p\omega_2)(pu-p\omega_3)\,e^{u^2(p\omega_1+p\omega_2+p\omega_3)}.$$

Mais les deux fonctions pu et $p'u$ sont doublement périodiques et admettent le couple de périodes $(2\omega_1, 2\omega_3)$. La fonction transcendante entière

$$e^{u^2(p\omega_1+p\omega_2+p\omega_3)}$$

doit donc être aussi doublement périodique d'après l'égalité précédente; elle ne peut donc être qu'une constante, comme on le voit directement ou comme il résulte du théorème fondamental de Liouville. Or ceci exige que l'on ait

$$p\omega_1+p\omega_2+p\omega_3 = 0.$$

Ainsi la fonction $\wp u$ et sa dérivée $\wp' u$ sont liées par la relation

$$(\mathrm{VII}_5) \qquad \wp'^2 u = 4(\wp u - \wp\omega_1)(\wp u - \wp\omega_2)(\wp u - \wp\omega_3).$$

Nous en concluons, en posant

$$(\mathrm{VII}_4) \qquad \wp\omega_\alpha = e_\alpha, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

que la fonction de u, $y = \wp u$, est une intégrale particulière de l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)$$

dont l'intégrale générale est donc $y = \wp(u + c)$, où c est une constante arbitraire. En prenant pour

$$\sqrt{4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}$$

celle des deux déterminations de cette racine qui est égale à $-\wp' u$, nous voyons aussi que les deux variables u et $y = \wp u$ sont liées par la relation

$$u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}},$$

car, pour $u = 0$, on a $y = \infty$.

99. Avant de passer à un autre objet, nous allons encore déduire quelques conséquences essentielles de l'équation différentielle du premier ordre à laquelle satisfait $\wp u$.

Et d'abord on peut écrire cette équation différentielle

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u + 4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2)\wp u - 4 e_1 e_2 e_3.$$

Remplaçons dans les deux membres $\wp u$ et $\wp' u$ par leurs développements en séries donnés par les formules (IV_3) et (IV_4), que l'on peut écrire

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c_r u^{2r-2} + \ldots,$$

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + 2 c_2 u + 4 c_3 u^3 + \ldots + (2r - 2) c_r u^{2r-3} + \ldots,$$

en posant, pour abréger (IV_5),

$$c_2 = 3 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} = \frac{g_2}{20}, \qquad c_3 = 5 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} = \frac{g_3}{28};$$

$$c_r = (2r - 1) \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^{2r}}.$$

On aura alors

$$p^3 u = \frac{1}{u^6} + \frac{3c_2}{u^2} + 3c_3 + \ldots,$$

$$p'^2 u = \frac{4}{u^6} - \frac{8c_2}{u^2} - 16c_3 + \ldots;$$

donc, en égalant, dans les deux membres de l'équation différentielle, les coefficients de $\frac{1}{u^2}$ et les termes indépendants de u, on obtient les deux relations

$$\begin{aligned} -\ 8c_2 &= 12c_2 + 4(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2), \\ -16c_3 &= 12c_3 - 4e_1e_2e_3, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 = -5c_2 = -\frac{g_2}{4} = -15 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4},$$

$$e_1e_2e_3 = 7c_3 = \frac{g_3}{4} = 35 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6},$$

ce qui permet d'écrire l'équation différentielle sous la forme [1]

(VII_6) $$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

100. En prenant les dérivées par rapport à u et en divisant par $p'u$, on tire de cette équation

(VII_7) $$2p'' u = 12 p^2 u - g_2.$$

---

(1) Comparez EISENSTEIN, *loc. cit.*, p. 285. Les formules (5) et (6) sont identiques à nos formules (VII_6) et (VII_5). Kronecker a proposé récemment, pour honorer la mémoire d'Eisenstein, d'écrire *en*(u) au lieu de pu, le symbole *en* étant formé au moyen de la première et de la dernière lettre d'Eisenstein. Nous conserverons la notation de M. Weierstrass, qui a fait connaître le rôle et la place de la fonction pu dans la théorie des fonctions elliptiques : cette notation, d'ailleurs, est aujourd'hui universellement adoptée.

En prenant les dérivées encore une fois, on a

$$(\mathrm{VII}_8) \qquad \wp'''u = 12\,\wp u\,\wp' u,$$

et l'on peut continuer ainsi et obtenir, en tenant compte chaque fois des équations précédentes, les dérivées successives de $\wp u$ en fonction de $\wp u$ et de $\wp' u$. On aperçoit sans peine que ces fonctions sont rationnelles entières en $\wp u$ et $\wp' u$; on peut même montrer que les dérivées d'ordre pair de $\wp u$ sont des fonctions rationnelles entières de $\wp u$ seulement et que les dérivées d'ordre impair de $\wp u$ sont égales au produit de $\wp' u$ par une fonction rationnelle entière de $\wp u$ seulement.

Ce résultat, en effet, se vérifie de suite sur les formules précédentes pour les dérivées seconde et troisième; il se démontre ensuite par induction, sans aucune difficulté.

101. L'équation (VII_7) permet d'obtenir sans peine, par des calculs successifs, les coefficients $c_4, c_5, \ldots, c_r, \ldots$ au moyen des deux coefficients

$$c_2 = \frac{g_2}{20}, \qquad c_3 = \frac{g_3}{28}.$$

En remplaçant, en effet, $\wp'' u$ et $\wp^2 u$ par leurs développements en série, on trouve, après quelques réductions faciles, en égalant dans les deux membres les coefficients de u^{2r-4}, la relation

$$(r-3)(2r+1)\,c_r = 3\sum_{i=2}^{i=r-2} c_i\,c_{r-i} \qquad (r = 4, 5, 6, \ldots).$$

On reconnaît en particulier que, comme on l'avait annoncé au commencement, tous ces coefficients sont des fonctions entières à coefficients rationnels de g_2 et de g_3 et que, par conséquent, toutes les sommes telles que

$$\sum_s{}^{(\prime)} \frac{1}{s^{2r}},$$

où r est un entier plus grand que 3, s'expriment par des fonctions entières, à coefficients rationnels, au moyen des sommes

$$\sum_s{}^{(\prime)} \frac{1}{s^4}, \quad \sum_s{}^{(\prime)} \frac{1}{s^6}.$$

Lorsqu'on se donne ω_1, ω_3, ces deux dernières sommes, ou, ce qui revient au même, les quantités g_2 et g_3 sont déterminées sans ambiguïté.

Nous montrerons plus tard que, inversement, si l'on se donne les quantités g_2 et g_3, telles toutefois que les racines e_1, e_2, e_3 de l'équation

$$4X^3 - g_2 X - g_3 = 0$$

soient différentes, c'est-à-dire telles que le discriminant

$$\mathcal{G} = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2) = (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2$$

de cette équation du troisième degré soit différent de zéro, il existe deux nombres ω_1 et ω_3 qui vérifient les équations (IV_5)

$$g_2 = 60 \sum_s{}^{(\prime)} \frac{1}{s^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_s{}^{(\prime)} \frac{1}{s^6}$$

et tels que le coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ soit différent de zéro (et même positif). La fonction pu, formée avec ces quantités $2\omega_1$, $2\omega_3$, satisfera manifestement à l'équation différentielle (VII_6); elle sera, dans le voisinage du point zéro, représentée par une série de la forme

$$\frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots,$$

et, comme on vient de vérifier que les coefficients, c_2, c_3, ..., c_r, ... sont entièrement déterminés par g_2 et g_3, on voit que ces coefficients g_2 et g_3 déterminent sans ambiguïté la fonction pu, bien que, à la vérité, les équations (IV_5) admettent une infinité de solutions ω_1, ω_3.

Cette remarque justifie la notation

$$p(u;\, g_2,\, g_3)$$

pour représenter la fonction ainsi déterminée. La fonction ζu est d'ailleurs entièrement déterminée dans les mêmes conditions, puisqu'on doit avoir, dans le voisinage du point zéro,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_2}{3} u^3 - \frac{c_3}{5} u^5 - \ldots.$$

Enfin la fonction σu est aussi déterminée sans ambiguïté par les conditions

$$\frac{1}{\sigma u}\frac{d\sigma u}{du} = \zeta u, \qquad \sigma(0) = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$\log \sigma u = \log u - \frac{c_2 u^4}{12} - \frac{c_3 u^6}{30} - \dots,$$

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{240} u^5 - \frac{g_3}{840} u^7 - \frac{g_2^2}{161\,280} u^9 + \dots,$$

en sorte que l'on pourra employer les notations

$$\zeta(u;\, g_2,\, g_3), \quad \sigma(u;\, g_2,\, g_3)$$

pour représenter sans ambiguïté ces fonctions.

102. Les équations d'homogénéité (III) prennent une forme un peu différente avec ces nouvelles notations. En effet, quand on multiplie ω_1 et ω_3 par α, les nombres g_2 et g_3, en vertu de leurs définitions (IV_5), sont multipliés respectivement par $\frac{1}{\alpha^4}$, $\frac{1}{\alpha^6}$: on aura donc

$$(\text{VIII}) \quad \begin{cases} (1) & \sigma\left(\alpha u;\, \dfrac{g_2}{\alpha^4},\, \dfrac{g_3}{\alpha^6}\right) = \alpha\, \sigma(u;\, g_2,\, g_3), \\ (2) & \zeta\left(\alpha u;\, \dfrac{g_2}{\alpha^4},\, \dfrac{g_3}{\alpha^6}\right) = \dfrac{1}{\alpha}\, \zeta(u;\, g_2,\, g_3), \\ (3) & p\left(\alpha u;\, \dfrac{g_2}{\alpha^4},\, \dfrac{g_3}{\alpha^6}\right) = \dfrac{1}{\alpha^2}\, p(u;\, g_2,\, g_3). \end{cases}$$

On observera que cette dernière relation se lit en quelque sorte sur l'équation différentielle

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

La fonction

$$\varphi = p\left(\alpha u;\, \frac{g_2}{\alpha^4},\, \frac{g_3}{\alpha^6}\right)$$

doit en effet vérifier l'équation différentielle

$$\left[\frac{d\varphi}{d(\alpha u)}\right]^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = 4\varphi^3 - \frac{g_2}{\alpha^4}\varphi - \frac{g_3}{\alpha^6}$$

ou

$$\left(\alpha^2 \frac{d\varphi}{du}\right)^2 = 4(\alpha^2\varphi)^3 - g_2(\alpha^2\varphi) - g_3,$$

qui s'obtient en changeant dans (VII_6) pu en $\alpha^2\varphi$; ces deux fonctions doivent donc être identiques, puisque, dans le voisinage du point zéro, leurs développements suivant les puissances de u doivent commencer tous deux par un terme en $\frac{1}{u^2}$.

103. La méthode précédemment exposée nous fournit le moyen d'avoir autant de termes que l'on veut dans les développements de σu, $\zeta u - \frac{1}{u}$, $pu - \frac{1}{u^2}$ en séries entières en u, chacun de ces termes étant exprimé en fonction entière de g_2 et de g_3. Il est utile d'avoir les premiers termes de ces développements, dont on verra plus tard l'usage fréquent. Nous transcrivons ci-dessous ces premiers termes

$$(\mathrm{IX})\quad \left\{\begin{aligned} &(1)\quad \sigma u = u - \frac{g_2 u^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3 u^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9.3^2.5.7} + \ldots,\\ &(2)\quad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{2^2.3.5} - \frac{g_3 u^5}{2^2.5.7} - \frac{g_2^2 u^7}{2^4.3.5^2.7} + \ldots,\\ &(3)\quad pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{2^2.5} + \frac{g_3 u^4}{2^2.7} + \frac{g_2^2 u^6}{2^4.3.5^2} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On rappelle que les deux derniers développements ne sont convergents qu'aux environs du point zéro.

Le lecteur rapprochera naturellement ces formules des formules (IV).

III. — Représentation de σu par un produit infini à simple entrée.

104. Nous allons maintenant reprendre l'étude directe de la fonction σu et chercher à transformer le produit infini à double entrée, qui définit σu, en produits infinis à simple entrée.

Supposons n différent de zéro et désignons par P_n le produit de tous les facteurs primaires de σu pour lesquels n a la même valeur. Un de ces facteurs

$$\left\{\left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\},$$

où $s = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, est le produit des deux quantités

$$\left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s}}, \quad e^{\frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}};$$

or les deux produits infinis que l'on obtient en prenant respectivement pour facteurs ces deux quantités, où m prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, sont évidemment convergents. Le premier produit

$$\prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\frac{u}{2\omega_1}}{m + n\frac{\omega_3}{\omega_1}}\right) e^{\frac{\frac{u}{2\omega_1}}{m + n\frac{\omega_3}{\omega_1}}} \right\},$$

d'après la formule (I_4), où l'on remplace u par $\frac{u}{2\omega_1}$ et a par $-\frac{n\omega_3}{\omega_1}$, est égal à

$$\frac{\sin\pi\frac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1}}{\sin\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}} e^{\frac{\pi u}{2\omega_1}\cot\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}.$$

Le second est égal à une puissance de e dont l'exposant est

$$\frac{u^2}{8\omega_1^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{\left(m + \frac{n\omega_3}{\omega_1}\right)^2},$$

quantité qui, en raison de la formule (I_3), est égale à

$$\frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2} \frac{1}{\sin^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}.$$

On aura donc

$$P_n = \frac{\sin\pi\frac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1}}{\sin\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}} e^{\frac{\pi u}{2\omega_1}\cot\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1} + \frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2}\frac{1}{\sin^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}}.$$

Il reste à effectuer le produit des facteurs primaires où $n = 0$. Ce produit

$$P_0 = \prod_m{}^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{2m\omega_1}\right) e^{\frac{u}{2m\omega_1} + \frac{u^2}{8m^2\omega_1^2}} \right\}$$

est égal au produit des deux produits convergents

$$\prod_m^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{2m\omega_1} \right) e^{\frac{u}{2m\omega_1}} \right\} = \frac{\sin \pi \dfrac{u}{2\omega_1}}{\pi \dfrac{u}{2\omega_1}}$$

et

$$\prod_m^{(\prime)} e^{\frac{u^2}{8m^2\omega_1^2}} = e^{\frac{u^2}{8\omega_1^2} \sum^{(\prime)} \frac{1}{m^2}};$$

d'ailleurs (n° 69)

$$\sum_m^{(\prime)} \frac{1}{m^2} = 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{3};$$

donc

$$P_0 = \frac{\sin \pi \dfrac{u}{2\omega_1}}{\pi \dfrac{u}{2\omega_1}} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_1^2}}.$$

Ainsi

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{24} \frac{\pi^2 u^2}{\omega_1^2}} \sin \pi \frac{u}{2\omega_1} \prod_n^{(\prime)} P_n,$$

où P_n est supposé remplacé par sa valeur établie plus haut. Cette formule, ayant été obtenue uniquement en groupant les facteurs du produit infini qui définit σu, est valable quel que soit u; le produit infini à simple entrée est absolument convergent et l'on peut en prendre la dérivée logarithmique.

Comme la dérivée logarithmique de P_n est

$$\frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi \frac{u - 2n\omega_3}{2\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi \frac{n\omega_3}{\omega_1} + \frac{\pi^2 u}{4\omega_1^2} \frac{1}{\sin^2 \pi \dfrac{n\omega_3}{\omega_1}},$$

on aura, en désignant cette expression par Q_n,

$$\zeta u = \frac{1}{12} \frac{\pi^2 u}{\omega_1^2} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi \frac{u}{2\omega_1} + \sum_n^{(\prime)} Q_n.$$

Cette dernière formule aurait pu être déduite très aisément de la formule (II_2) en groupant ensemble les termes qui correspondent à une même valeur de n. On peut prendre la dérivée de la série

qui figure au second membre, terme par terme. Si donc on pose

$$R_n = -\frac{dQ_n}{du} = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{u-2n\omega_3}{2\omega_1}} - \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}},$$

on aura

$$pu = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega_1^2} + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{u}{2\omega_1}} + \sum_n^{(\prime)} R_n.$$

On parviendrait d'ailleurs à cette dernière formule par un groupement convenable des termes dans le second membre de l'équation (II_3).

105. Ces formules se simplifient; cela résulte de ce que la série

$$\sum_n^{(\prime)} \frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}$$

est convergente, parce que le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est imaginaire.

Si, en effet, a et b sont des nombres réels dont le dernier n'est pas nul, on a

$$\sin(a+bi) = \frac{e^{ia}e^{-b} - e^{-ia}e^{b}}{2i};$$

donc, puisque les valeurs absolues des quantités

$$\frac{e^{ia}e^{-b}}{2i}, \quad -\frac{e^{-ia}e^{b}}{2i}$$

sont

$$\frac{1}{2}e^{-b}, \qquad \frac{1}{2}e^{b}$$

et que la valeur absolue d'une somme de deux termes est plus grande que la différence des valeurs absolues de ces termes, $|\sin(a+bi)|$ est supérieure à $\frac{e^b-e^{-b}}{2}$ si b est positif, à $-\frac{e^b-e^{-b}}{2}$ si b est négatif; on a donc toujours

$$|\sin(a+bi)| > \left|\frac{b}{1} + \frac{b^3}{1.2.3} + \ldots\right| > |b|.$$

Si donc on désigne par β la valeur absolue du coefficient de i

dans

$$\frac{\pi\omega_3}{\omega_1},$$

on aura

$$\left|\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right| < \frac{1}{n^2\beta^2};$$

et, par conséquent, la série considérée est absolument convergente.

106. Ceci posé, considérons la valeur de σu. Puisque P_n est le produit des deux quantités

$$\frac{\sin\pi\dfrac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1}}{\sin\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\, e^{\frac{\pi u}{2\omega_1}\cot\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}, \quad e^{\frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2}\frac{1}{\sin^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}},$$

et que le produit infini

$$\prod_n^{(\prime)} e^{\frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2}\frac{1}{\sin^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}} = e^{\frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2}\sum\limits_n^{(\prime)}\frac{1}{\sin^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}}$$

est absolument convergent et n'a pas une valeur nulle, il faut que le produit infini

$$\prod_n^{(\prime)} \frac{\sin\pi\dfrac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1}}{\sin\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\, e^{\frac{\pi u}{\omega_1}\cot\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}$$

soit lui-même convergent et égal à

$$e^{-\frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2}\sum\limits_n^{(\prime)}\frac{1}{\sin^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}} \prod_n^{(\prime)} P_n.$$

Si d'ailleurs, dans ce produit infini, on groupe ensemble les termes pour lesquels n a des valeurs égales et de signes contraires et si l'on tient compte de l'identité

$$\sin\pi\frac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1}\sin\pi\frac{-2n\omega_3 - u}{2\omega_1} = \sin^2\pi\frac{u}{2\omega_1} - \sin^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1},$$

on voit qu'il prend la forme

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\pi\dfrac{u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right]$$

où le caractère de convergence absolue est manifeste, puisque la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}$$

est absolument convergente.

On a donc finalement

$$(\mathrm{X}_1)\qquad \sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\pi\dfrac{u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right],$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(\mathrm{X}_4)\qquad \eta_1=\frac{\pi^2}{2\omega_1}\left[\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right].$$

Le lecteur rapprochera naturellement la formule qu'on vient de trouver pour σu de la formule d'Euler qui donne $\sin x$ sous forme de produit infini.

On aura de même

$$(\mathrm{X}_2)\quad \zeta u=\frac{\eta_1 u}{\omega_1}+\frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1}+\frac{\pi}{2\omega_1}\sum_n^{(\prime)}\left\{\cot\pi\frac{u-2n\omega_3}{2\omega_1}+\cot\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}\right\},$$

$$(\mathrm{X}_3)\quad pu=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+\frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\sum_n\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{u-2n\omega_3}{2\omega_1}}.$$

Si, dans l'avant-dernière formule, on fait $u=\omega_1$, on trouve

$$\zeta\omega_1=\eta_1,$$

en remarquant que, pour deux indices n égaux et de signes contraires, les termes sous le signe $\sum^{(\prime)}$ sont alors égaux et de signes

contraires. Ceci montre que la quantité η_1, définie par la formule (X_4), est bien la même que celle que l'on a définie plus haut par la formule (VI_4).

107. On peut, dans les formules (X), échanger ω_1 et ω_3, ce qui reviendrait d'ailleurs à grouper, dans le produit infini ou les séries qui ont servi de définition primitive, les facteurs ou les termes pour lesquels m est le même; η_1 doit alors être remplacé par

$$(X_5) \qquad \eta_3 = \frac{\pi^2}{2\omega_3}\left[\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sin^2 \pi \dfrac{n\omega_1}{\omega_3}}\right].$$

Les formules (VI), relatives aux changements que produit dans les fonctions σu, ζu, pu l'addition de $2\omega_1$ ou $2\omega_3$ à l'argument, ont été obtenues dans le n° 98 par une voie détournée; il importe de remarquer qu'elles se lisent en quelque sorte directement sur les formes (X) données à ces fonctions et sur celles qui s'en déduisent en changeant ω_1 en ω_3, en sorte qu'un groupement, d'ailleurs bien naturel, des facteurs primaires de σu met en évidence ces propriétés fondamentales.

108. Si, dans la formule (X_2), on fait $u = \omega_3$, on trouve

$$\eta_3 = \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} A,$$

en posant, pour abréger,

$$A = \sum_n^{(\prime)} \left\{ \cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}(1 - 2n) + \cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1} 2n \right\},$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}(1 + 2n) + \cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}(1 - 2n) \right\};$$

la seconde valeur de A s'obtient, en effet, en prenant la demi-somme de la première et de celle qu'on en déduit en y changeant n en $-n$.

On a d'ailleurs, comme on le voit en faisant la somme des n

premiers termes dans la seconde expression,

$$A = \lim_{n=\infty} \left[\cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}(1+2n) - \cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1} \right].$$

Or si, en désignant par a et b des nombres réels, on suppose

$$\frac{\pi\omega_3}{2\omega_1} = a + bi,$$

on aura, h étant un entier positif,

$$\cot h(a+bi) = i\frac{e^{hai}e^{-hb} + e^{-hai}e^{hb}}{e^{hai}e^{-hb} - e^{-hai}e^{hb}},$$

et il est manifeste que, lorsque h augmente indéfiniment par valeurs positives, le second membre tend vers $-i$ ou vers $+i$, selon que b est positif ou négatif; on a donc, suivant les cas,

$$A = \mp i - \cot \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}$$

et, par suite, comme on l'avait annoncé (n° 92),

$$(X_6) \qquad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pm\frac{\pi}{2}i,$$

suivant que la partie réelle de $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est positive ou négative.

109. Nous nous servirons de la formule (X_3) pour vérifier directement l'identité démontrée déjà au n° 104

$$p\omega_1 + p\omega_2 + p\omega_3 = 0,$$

que l'on retrouvera encore plus tard par une autre voie.

On trouve de suite

$$\begin{aligned} p\omega_1 + p\omega_2 + p\omega_3 & \\ = -\frac{3\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \Bigg[\sum_n \frac{1}{\cos^2 n\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} &+ \sum_n \frac{1}{\sin^2(2n+1)\frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}} \\ &+ \sum_n \frac{1}{\cos^2(2n+1)\frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}} \Bigg]. \end{aligned}$$

Les deux dernières sommes prises ensemble donnent

$$\sum_n \frac{1}{\sin^2(2n+1)\frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}\cos^2(2n+1)\frac{\pi\omega_3}{2\omega_1}} = \sum_n \frac{4}{\sin^2(2n+1)\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}.$$

D'un autre côté, écrivons la formule (X_4) sous la forme

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{4\omega_1}\left[\frac{1}{3} + \sum_n^{(\prime)} \frac{1}{\sin^2 n\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}\right];$$

si nous observons qu'on a, en séparant les termes où n est pair de ceux où n est impair,

$$\sum_n^{(\prime)} \frac{1}{\sin^2 n\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} = \sum_\nu^{(\prime)} \frac{1}{\sin^2 2\nu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} + \sum_\nu \frac{1}{\sin^2(2\nu+1)\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}$$

et que, à cause de l'identité

$$\frac{1}{\sin^2 2\nu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\nu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} + \frac{1}{\cos^2\nu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}\right]$$

et de la convergence des séries employées, on a

$$\sum_\nu^{(\prime)} \frac{1}{\sin^2 2\nu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} = \frac{1}{4}\left[-1 + \sum_\nu^{(\prime)} \frac{1}{\sin^2\nu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} + \sum_\nu \frac{1}{\cos^2\nu\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}\right],$$

il vient, en remplaçant dans l'expression de $\sum\limits_n^{(\prime)} \dfrac{1}{\sin^2 n\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}$, multipliant par 4 et réunissant les deux séries à termes identiques,

$$1 + 3\sum_n^{(\prime)} \frac{1}{\sin^2 n\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} = \sum_n \frac{1}{\cos^2 n\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} + 4\sum_n \frac{1}{\sin^2(2n+1)\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}};$$

donc

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{4\omega_1}\left[\frac{1}{3}\sum_n \frac{1}{\cos^2 n\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}} + \frac{4}{3}\sum_n \frac{1}{\sin^2(2n+1)\frac{\pi\omega_3}{\omega_1}}\right].$$

En substituant cette valeur de η_1 dans l'expression trouvée plus haut pour $p\omega_1 + p\omega_2 + p\omega_3$, on voit de suite que cette somme est nulle.

IV. — Les cofonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

110. A la fonction σu, il convient, pour la commodité des notations, d'adjoindre trois autres fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ qui jouent, par rapport à σu, le rôle que le *cosinus* joue par rapport au *sinus*.

En désignant par α l'un quelconque des trois nombres 1, 2, 3, nous poserons (¹)

$$(\mathrm{XI}_1) \qquad \sigma_\alpha u = \frac{e^{-\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = \frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma\omega_\alpha}.$$

Ces fonctions sont définies de manière que toutes trois se réduisent à 1 pour $u = 0$. Elles sont toutes trois des fonctions paires; les égalités

$$e^{-\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha) = e^{\eta_\alpha u}\sigma(\omega_\alpha - u),$$

qui mettent ce fait en évidence, résultent immédiatement des

(¹) Dans ses recherches fondamentales sur les fonctions elliptiques, M. Hermite a désigné des fonctions admettant les mêmes zéros que les trois cofonctions $\sigma_\alpha u$, en affectant d'un indice double la fonction qu'il considère. Cette notation, qui offre, elle aussi, de grands avantages, a été appliquée par M. Klein à la fonction σu (*Abhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, t. XIII; 1885). Voyez aussi les *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* du même auteur. Il convient de prévenir le lecteur qui voudra lire les beaux travaux de M. Klein que les quantités qu'il désigne par ω_1, ω_2, η_1, η_2 sont celles que nous désignons par $2\omega_1$, $2\omega_3$, $2\eta_1$, $2\eta_3$.

On passe des fonctions $\sigma_{00}u$, $\sigma_{01}u$, $\sigma_{10}u$, $\sigma_{11}u$ de M. Klein aux fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ de M. Weierstrass à l'aide des relations

$$\sigma u = \frac{\sigma_{00}(u)}{1}, \qquad \sigma_1 u = \frac{\sigma_{01}(u)}{\sigma_{01}(0)}, \qquad \sigma_2 u = \frac{\sigma_{11}(u)}{\sigma_{11}(0)}, \qquad \sigma_3 u = \frac{\sigma_{10}(u)}{\sigma_{10}(u)}.$$

Inversement, dans nos notations, on a, en désignant par λ, μ, soit 0, soit 1,

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u) = e^{(\lambda\eta_1+\mu\eta_3)\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_3}{2}\right)}\sigma(u-\lambda\omega_1-\mu\omega_3).$$

Dans son excellent Ouvrage, *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen*, M. Weber conserve la notation σu et adopte des notations à double indice pour les trois cofonctions de M. Weierstrass elles-mêmes. Ses trois fonctions

$$\sigma_{10}u, \quad \sigma_{00}u, \quad \sigma_{01}u$$

sont les trois fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ prises dans le même ordre.

égalités

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u,$$

en y remplaçant u par $u-\omega_\alpha$ et en se rappelant que la fonction σu est impaire.

Les dérivées logarithmiques de ces trois fonctions, que nous désignerons par $\zeta_\alpha(u)$, sont des fonctions impaires et s'annulent pour $u=0$. Elles peuvent être définies par les formules

$$(\mathrm{XI}_2) \qquad \zeta_\alpha u = \zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Les dérivées des fonctions $\zeta_\alpha(u)$, changées de signe, ne sont autre chose que les fonctions

$$p(u+\omega_\alpha).$$

On montrera tout à l'heure que $p(u+\omega_\alpha)$ s'exprime rationnellement au moyen de pu.

111. Nous allons d'abord, par quelques exemples, montrer l'utilité de ces notations.

Envisageons, par exemple, l'expression trouvée pour $\sigma(2u)$ au n° 98. Elle pourra s'écrire maintenant

$$(\mathrm{XI}_3) \qquad \sigma(2u) = 2\sigma u\sigma_1 u\sigma_2 u\sigma_3 u.$$

De même, l'expression obtenue dans le même n° 98 pour $p'u$ peut, en tenant compte des égalités

$$e_1+e_2+e_3=0, \qquad \eta_1+\eta_2+\eta_3=0,$$

s'écrire

$$(\mathrm{XI}_3\ bis) \qquad p'u = -2\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\frac{\sigma_3 u}{\sigma u} = -\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u}.$$

De même encore, la relation (VII_1), pour $a=\omega_\alpha$, pourra s'écrire maintenant

$$(\mathrm{XI}_4) \qquad pu - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u},$$

et nous pourrons, à l'aide de cette relation, séparer nettement les deux racines carrées de $pu-e_\alpha$ et, par suite, les racines carrées des six différences des nombres e_1, e_2, e_3, ce qui nous sera bientôt très utile.

Nous conviendrons de désigner par

$$\sqrt{pu - e_\alpha}$$

la fonction univoque de u

$$\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}.$$

En faisant $u = \omega_\beta$ dans la formule

$$(\text{XI}_5) \qquad \sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u},$$

on a donc aussi

$$(\text{XI}_6) \qquad \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha \omega_\beta}{\sigma \omega_\beta}.$$

Au moyen des relations (IV), nous pouvons trouver maintenant autant de termes que nous voudrons dans le développement des fonctions $\sigma_\alpha u$ en séries entières en u. En extrayant la racine carrée de $pu - e_\alpha$, de manière que la fonction $\sigma_\alpha u$ donnée par la formule

$$\sigma_\alpha u = \sigma u \sqrt{pu - e_\alpha}$$

soit égale à $+1$ pour $u = 0$, on aura facilement

$$(\text{XI}_7) \qquad \sigma_\alpha u = 1 - \frac{e_\alpha}{2} u^2 + \frac{1}{48}(g_2 - 6 e_\alpha^2) u^4 + \ldots;$$

mais on n'aperçoit pas, par cette méthode, la loi de formation des coefficients.

112. Nous allons maintenant développer pour les trois cofonctions des formules analogues à celles que nous avons déjà obtenues pour la fonction σu. Ces formules résultent immédiatement des définitions, des formules (VI_{1-4}), (VII_3), (VII_4), (XI_1) et (XI_2). Pour simplifier l'écriture, nous ferons, une fois pour toutes, la convention suivante :

Les trois indices α, β, γ désigneront toujours les trois nombres entiers 1, 2, 3, pris dans un ordre quelconque, de sorte que l'un des trois indices α, β, γ soit 1, que l'autre soit 2 et que celui qui reste soit 3. Quand, dans une formule, figureront deux seulement des trois indices α, β, γ, on pourra donner à chacun de ces

deux indices l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3, pourvu qu'on ne leur donne pas la même valeur. Enfin quand, dans une formule, ne figurera qu'un seul des trois indices α, β, γ, il sera entendu que cet indice pourra prendre l'une quelconque des trois valeurs 1, 2, 3.

Ceci posé, voici les formules annoncées, où les signes supérieurs se correspondent ainsi que les signes inférieurs :

$$(\text{XII}_1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma_\alpha \omega_\alpha = 0, \\ &\sigma_\alpha \omega_\beta = - e^{-\eta_\alpha \omega_\beta} \frac{\sigma \omega_\gamma}{\sigma \omega_\alpha}; \end{aligned} \right.$$

$$(\text{XII}_2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma\ (u + 2\omega_\alpha) = - e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)} \sigma u, \\ &\sigma_\alpha(u + 2\omega_\alpha) = - e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)} \sigma_\alpha u, \\ &\sigma_\alpha(u + 2\omega_\beta) = + e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)} \sigma_\alpha u, \\ &\sigma(u + 2m\omega_\alpha + 2n\omega_\beta + 2r\omega_\gamma) \\ &\qquad = (-1)^{nr+rm+mn+m+n+r} e^{2(m\eta_\alpha+n\eta_\beta+r\eta_\gamma)(u+m\omega_\alpha+n\omega_\beta+r\omega_\gamma)} \sigma u, \\ &\sigma_\alpha(u + 2m\omega_\alpha + 2n\omega_\beta + 2r\omega_\gamma) \\ &\qquad = (-1)^{nr+rm+mn+m} e^{2(m\eta_\alpha+n\eta_\beta+r\eta_\gamma)(u+m\omega_\alpha+n\omega_\beta+r\omega_\gamma)} \sigma_\alpha u; \end{aligned} \right.$$

$$(\text{XII}_3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma\ (u \pm \omega_\alpha) = \pm e^{\pm\eta_\alpha u} \sigma\omega_\alpha \sigma_\alpha u, \\ &\sigma_\alpha(u \pm \omega_\alpha) = \mp e^{\eta_\alpha(\omega_\alpha \pm u)} \frac{\sigma u}{\sigma\omega_\alpha} = \mp e^{\pm\eta_\alpha u} \frac{\sigma_\beta\omega_\alpha \sigma_\gamma\omega_\alpha}{\sigma\omega_\alpha} \sigma u, \\ &\sigma_\alpha(u \pm \omega_\beta) = - \frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha} e^{\pm\eta_\beta u - \eta_\alpha\omega_\beta} \sigma_\gamma u = e^{\pm\eta_\beta u} \sigma_\alpha\omega_\beta \sigma_\gamma u. \end{aligned} \right.$$

$$(\text{XII}_4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\zeta\ (u + 2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha, \\ &\zeta_\alpha(u + 2\omega_\alpha) = \zeta_\alpha u + 2\eta_\alpha, \\ &\zeta_\alpha(u + 2\omega_\beta) = \zeta_\alpha u + 2\eta_\beta; \end{aligned} \right.$$

$$(\text{XII}_5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\zeta\ (u \pm \omega_\alpha) = \zeta_\alpha u \pm \eta_\alpha, \\ &\zeta_\alpha(u \pm \omega_\alpha) = \zeta u \pm \eta_\alpha, \\ &\zeta_\alpha(u \pm \omega_\beta) = \zeta_\gamma u \pm \eta_\beta; \end{aligned} \right.$$

$$(\text{XII}_6)\quad \left\{ \begin{aligned} &e^{\eta_\alpha\omega_\alpha} = \sigma_\beta\omega_\alpha \sigma_\gamma\omega_\alpha, \\ &e^{\eta_\beta\omega_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha\omega_\gamma}{\sigma_\alpha\omega_\beta \sigma_\gamma\omega_\alpha} = \frac{-\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\beta \sigma_\beta\omega_\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (XII_1) se déduisent de la définition des fonctions $\sigma_\alpha u$ (XI_1) en supposant $u = \omega_\alpha$, $u = \omega_\beta$ et en se rappelant que $\sigma(2\omega_\alpha)$ est nul, que ω_γ est égal à $-\omega_\alpha - \omega_\beta$. Parmi les formules ($\text{XII}_2$), la première résulte des formules (VI_1); la deuxième et la troisième s'obtiennent en remplaçant dans les formules (XI_1)

u par $u + 2\omega_\alpha$ ou $u + 2\omega_\beta$ et en réduisant au moyen des formules (VI$_1$); la quatrième se déduit de la formule (VI$_2$) en y remplaçant u par $u + 2r\omega_2$ et en réduisant au moyen de la formule (X$_6$) qui montre que chacune des quantités $\eta_\alpha \omega_\beta - \eta_\beta \omega_\alpha$ est égale à $\pm \frac{\pi i}{2}$. En changeant dans la quatrième formule (XII$_2$) u en $u + \omega_\alpha$, on obtient aisément la cinquième. La première formule (XII$_3$) ne diffère pas de la définition des fonctions $\sigma_\alpha u$; les premières expressions de $\sigma_\alpha(u + \omega_\alpha)$, $\sigma_\alpha(u + \omega_\beta)$ s'en déduisent en changeant u en $u + \omega_\alpha$, $u + \omega_\beta$ et réduisant au moyen de la première formule (XII$_2$); en changeant ensuite u en $-u$, on obtient les expressions analogues pour $\sigma_\alpha(u - \omega_\alpha)$, $\sigma_\alpha(u - \omega_\beta)$. La seconde expression de $\sigma_\alpha(u \pm \omega_\beta)$ se déduit de la première en tenant compte de la seconde formule (XII$_1$); en remplaçant, dans cette seconde expression de $\sigma_\alpha(u - \omega_\beta)$, u par ω_β, on obtient une équation qui ne diffère que par les notations de la première formule (XII$_6$), laquelle permet de ramener la première des expressions de $\sigma_\alpha(u \pm \omega_\alpha)$ à la seconde. Les autres formules (XII$_6$) s'obtiennent en remplaçant u respectivement par ω_β et ω_α dans les expressions de $\sigma(u + \omega_\alpha)$, $\sigma_\alpha(u + \omega_\beta)$.

113. Remarquons encore que, si nous remplaçons dans l'expression $\frac{\sigma_\beta \omega_\alpha}{\sigma \omega_\alpha}$, obtenue dans le numéro précédent pour $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$, $\sigma_\beta \omega_\alpha$ par sa valeur tirée de (XII$_1$), on obtient la relation

$$\text{(XIII}_1\text{)} \qquad \sqrt{e_\alpha - e_\beta} = -e^{-\eta_\beta \omega_\alpha} \frac{\sigma \omega_\gamma}{\sigma \omega_\alpha \sigma \omega_\beta}.$$

Si l'on compare cette formule à celle qu'on en déduit en échangeant les indices, on a de suite la relation

$$\text{(XIII}_2\text{)} \qquad e^{\eta_\alpha \omega_\beta - \eta_\beta \omega_\alpha} = \frac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt{e_\beta - e_\alpha}}.$$

D'ailleurs, à cause des formules

$$\eta_\alpha + \eta_\beta + \eta_\gamma = 0, \qquad \omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0,$$

on a

$$\eta_\beta \omega_\gamma - \eta_\gamma \omega_\beta = \eta_\gamma \omega_\alpha - \eta_\alpha \omega_\gamma = \eta_\alpha \omega_\beta - \eta_\beta \omega_\alpha,$$

et chacune de ces quantités est égale à $\pm\frac{\pi i}{2}$.

Dans le cas où le coefficient de i dans $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est positif, on a

$$(\mathrm{XIII}_3)\qquad \eta_3\omega_2-\eta_2\omega_3=\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2=\frac{\pi i}{2}$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{e_3-e_2}=i\sqrt{e_2-e_3},$$
$$\sqrt{e_1-e_3}=i\sqrt{e_3-e_1},$$
$$\sqrt{e_2-e_1}=i\sqrt{e_1-e_2}.$$

Dans des applications très fréquentes, e_1, e_2, e_3 sont des nombres réels tels que l'on ait

$$e_1>e_2>e_3;$$

aussi convient-il d'écrire les relations précédentes sous la forme

$$(\mathrm{XIII}_4)\qquad \begin{cases}\sqrt{e_3-e_2}= & i\sqrt{e_2-e_3},\\ \sqrt{e_3-e_1}= & -i\sqrt{e_1-e_3},\\ \sqrt{e_2-e_1}= & i\sqrt{e_1-e_2}.\end{cases}$$

Si le coefficient de i dans $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ était négatif, on devrait changer i en $-i$.

114. Si maintenant, dans la formule (XI_4), on change u en $u+\omega_\alpha$, on a

$$p(u+\omega_\alpha)-e_\alpha=\frac{\sigma_\alpha^2(u+\omega_\alpha)}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)}:$$

or, en vertu des relations (XII_3) et (XI_4), le second membre peut s'écrire

$$\frac{\sigma_\beta^2\omega_\alpha\,\sigma_\gamma^2\omega_\alpha}{\sigma^2\omega_\alpha\,\sigma^2\omega_\alpha}\,\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\alpha^2 u}=\frac{(e_\beta-e_\alpha)(e_\gamma-e_\alpha)}{pu-e_\alpha};$$

on a donc

$$(\mathrm{XIII}_5)\qquad p(u+\omega_\alpha)=e_\alpha+\frac{(e_\beta-e_\alpha)(e_\gamma-e_\alpha)}{pu-e_\alpha},$$

formule qui est d'un usage fréquent dans les applications et qui pourrait se déduire aussi facilement du théorème d'addition relatif à la fonction pu.

115. Les relations (XI_4) mettent en évidence des relations algébriques entre les fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$; en effet, en éliminant pu entre ces relations, on trouve

$$(XIV_1) \qquad \sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u = (e_\beta - e_\alpha)\sigma^2 u;$$

parmi les relations de cette espèce, il y en a évidemment deux d'indépendantes.

Signalons, comme conséquence de ces formules, la relation

$$(XIV_2) \qquad (e_\gamma - e_\beta)\sigma_\alpha^2 u + (e_\alpha - e_\gamma)\sigma_\beta^2 u + (e_\beta - e_\alpha)\sigma_\gamma^2 u = 0.$$

116. Au moyen de ces mêmes relations (XI_4), la formule fondamentale (VII_1) peut s'écrire

$$\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a} = pa - pu = \frac{\sigma_\alpha^2 a}{\sigma^2 a} - \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u}$$

ou

$$(XV_1) \qquad \sigma(u+a)\sigma(u-a) = \sigma^2 u\,\sigma_\alpha^2 a - \sigma_\alpha^2 u\,\sigma^2 a.$$

Si, dans cette dernière formule, on change a en $a + \omega_\alpha$ et si l'on tient compte des formules (XII_3) et (XI_6), on trouve

$$(XV_2) \qquad \sigma_\alpha(u+a)\sigma_\alpha(u-a) = \sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 a - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\sigma^2 u\,\sigma^2 a;$$

de même, en changeant u en $u + \omega_\beta$, puis échangeant les indices α et β, on trouve

$$(XV_3) \qquad \sigma_\alpha(u+a)\sigma_\alpha(u-a) = \sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\beta^2 a - (e_\alpha - e_\beta)\sigma^2 a\,\sigma_\gamma^2 u.$$

Au reste, l'identité entre les deux seconds membres des deux dernières formules résulte aisément des relations entre les quatre fonctions σ, relations qui permettraient d'ailleurs de transformer de diverses manières les formules précédentes.

Nous joindrons de suite à ces formules d'autres analogues qui donnent les expressions des produits $\sigma(u+a)\sigma_\alpha(u-a)$, $\sigma_\gamma(u+a)\sigma_\beta(u-a)$ relatifs à deux fonctions σ d'indices différents.

Observons d'abord que, de la formule (VII_2), on peut déduire d'autres identités analogues où figurent les cofonctions, en ajoutant, par exemple, aux quantités u, a, b, c quelqu'une des

quantités ω_1, ω_2, ω_3; nous nous contenterons d'écrire les deux suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sigma_\alpha(u+a)\,\sigma\,(u-a)\,\sigma_\alpha(b+c)\,\sigma(b-c)\\
+&\sigma_\alpha(u+b)\,\sigma\,(u-b)\,\sigma_\alpha(c+a)\,\sigma(c-a)\\
+&\sigma_\alpha(u+c)\,\sigma\,(u-c)\,\sigma_\alpha(a+b)\,\sigma(a-b)=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_\gamma(u+a)\,\sigma_\beta(u-a)\,\sigma_\alpha(b+c)\,\sigma(b-c)\\
+&\sigma_\gamma(u+b)\,\sigma_\beta(u-b)\,\sigma_\alpha(c+a)\,\sigma(c-a)\\
+&\sigma_\gamma(u+c)\,\sigma_\beta(u-c)\,\sigma_\alpha(a+b)\,\sigma(a-b)=0,
\end{aligned}$$

dont la première résulte simplement de la formule (VII_2) en augmentant toutes les quantités u, a, b, c de $\frac{\omega_\alpha}{2}$, et dont la seconde résulte de la première en y remplaçant u par $u+\omega_\beta$; après avoir fait ces changements, on n'a plus qu'à réduire au moyen des formules (XII_3).

Si, maintenant, dans les relations qu'on vient d'obtenir, on suppose $c=0$, $b=\omega_\beta$, on trouve de suite, toujours au moyen des formules (XII_3) et après avoir divisé par $\sigma_\alpha\omega_\beta\,\sigma\omega_\beta$,

$$(\text{XV}_4)\quad \sigma_\alpha(u+a)\,\sigma(u-a)=\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta a\,\sigma_\gamma a-\sigma a\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u,$$

$$\sigma_\gamma(u+a)\,\sigma_\beta(u-a)=\sigma_\gamma u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma a\,\sigma_\beta a+\frac{\sigma_\gamma^2\omega_\beta}{\sigma^2\omega_\beta}\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma a\,\sigma_\alpha a;$$

cette dernière relation, si l'on tient compte de la formule (XI_6), s'écrit définitivement

$$(\text{XV}_5)\quad \sigma_\gamma(u+a)\,\sigma_\beta(u-a)=\sigma_\gamma u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma a\,\sigma_\beta a+(e_\beta-e_\gamma)\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma a\,\sigma_\alpha a.$$

On obtient encore deux nouvelles formules, que nous nous dispensons d'écrire, en changeant dans (XV_4) et (XV_5) a en $-a$.

117. Nous allons maintenant déduire de la formule (XV_3) l'expression de $p\frac{u}{2}$ et, en particulier, de $p\frac{\omega_\alpha}{2}$ qui nous sera bientôt utile. En y remplaçant a par u, puis u par $\frac{u}{2}$, on trouve

$$\sigma_\alpha u=\sigma_\alpha^2\frac{u}{2}\,\sigma_\beta^2\frac{u}{2}-(e_\alpha-e_\beta)\,\sigma^2\frac{u}{2}\,\sigma_\gamma^2\frac{u}{2};$$

en changeant α en β, il vient

$$\sigma_\beta u = \sigma_\alpha^2 \frac{u}{2} \sigma_\beta^2 \frac{u}{2} + (e_\alpha - e_\beta)\, \sigma^2 \frac{u}{2} \sigma_\gamma^2 \frac{u}{2};$$

d'où, en ajoutant et en retranchant,

$$\sigma_\alpha u + \sigma_\beta u = 2\sigma_\alpha^2 \frac{u}{2} \sigma_\beta^2 \frac{u}{2},$$

$$\sigma_\alpha u - \sigma_\beta u = 2(e_\beta - e_\alpha)\, \sigma^2 \frac{u}{2} \sigma_\gamma^2 \frac{u}{2}.$$

Sans nous arrêter à ce fait, que ces formules mettent en évidence les valeurs de u qui annulent $\sigma_\alpha u + \sigma_\beta u$, $\sigma_\alpha u - \sigma_\beta u$, changeons dans la première β en γ et divisons membre à membre; il viendra

$$\frac{\sigma_\alpha u + \sigma_\beta u}{\sigma_\alpha u + \sigma_\gamma u} = \frac{\sigma_\beta^2 \frac{u}{2}}{\sigma_\gamma^2 \frac{u}{2}}$$

ou

$$\frac{\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} + \frac{\sigma_\beta u}{\sigma u}}{\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} + \frac{\sigma_\gamma u}{\sigma u}} = \frac{\sigma_\beta^2 \frac{u}{2}}{\sigma^2 \frac{u}{2}} : \frac{\sigma_\gamma^2 \frac{u}{2}}{\sigma^2 \frac{u}{2}},$$

ou encore, en vertu des formules (XI_5),

$$\frac{\sqrt{pu - e_\alpha} + \sqrt{pu - e_\beta}}{\sqrt{pu - e_\alpha} + \sqrt{pu - e_\gamma}} = \frac{p\frac{u}{2} - e_\beta}{p\frac{u}{2} - e_\gamma},$$

d'où

$$-p\frac{u}{2}\left[\sqrt{pu - e_\beta} - \sqrt{pu - e_\gamma}\right] = (e_\beta - e_\gamma)\sqrt{pu - e_\alpha}$$
$$- e_\gamma \sqrt{pu - e_\beta} + e_\beta \sqrt{pu - e_\gamma};$$

en multipliant par $\sqrt{pu - e_\beta} + \sqrt{pu - e_\gamma}$ et tenant compte de l'identité

$$\left[\sqrt{pu - e_\beta} + \sqrt{pu - e_\gamma}\right]\left[\sqrt{pu - e_\beta} - \sqrt{pu - e_\gamma}\right] = e_\gamma - e_\beta,$$

on trouve, après quelques réductions faciles et après avoir divisé

par $e_\beta - e_\gamma$,

$$(\mathrm{XVI}_1)\quad p\frac{u}{2} = pu + \sqrt{pu-e_\beta}\sqrt{pu-e_\gamma} + \sqrt{pu-e_\gamma}\sqrt{pu-e_\alpha} + \sqrt{pu-e_\alpha}\sqrt{pu-e_\beta},$$

et, en particulier, en supposant $u = \omega_\alpha$,

$$(\mathrm{XVI}_2)\qquad p\frac{\omega_\alpha}{2} = e_\alpha + \sqrt{e_\alpha-e_\beta}\sqrt{e_\alpha-e_\gamma}.$$

Il importe de remarquer que, dans ces formules, les radicaux ont le sens précis qui a été spécifié dans le n° 112.

118. On obtient immédiatement les expressions de $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, décomposées en facteurs primaires, en partant de leurs définitions (XI_1) et en utilisant la formule (V_1). On trouve ainsi

$$(\mathrm{XVII}_1)\quad \sigma_\alpha u . e^{\frac{u^2}{2}p\omega_\alpha} = \prod_s \left\{ \left(1-\frac{u}{s-\omega_\alpha}\right) e^{\frac{u}{s-\omega_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-\omega_\alpha)^2}} \right\}.$$

Cette formule met en évidence les zéros des trois fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

En groupant les facteurs exactement comme on l'a fait pour σu et en effectuant des réductions toutes pareilles à celles que l'on a rencontrées alors, on obtient successivement quelques identités intéressantes. Soit d'abord $\alpha = 1$. On remplacera partout, dans le second membre de l'équation précédente, $\dfrac{u}{s-\omega_1}$ par

$$\frac{\dfrac{u}{2\omega_1}}{m-\left(\dfrac{1}{2}-n\dfrac{\omega_3}{\omega_1}\right)};$$

alors, en appliquant les formules (I_{3-4}), on trouvera, pour le produit des facteurs où n reste le même,

$$\left[\frac{\cos\pi\left(n\dfrac{\omega_3}{\omega_1}-\dfrac{u}{2\omega_1}\right)e^{-\frac{\pi u}{2\omega_1}\operatorname{tg}\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}}{\cos\pi n\dfrac{\omega_3}{\omega_1}}\right] \times \left[e^{\frac{\pi^2u^2}{8\omega_1^2}\frac{1}{\cos^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}}\right].$$

Les deux facteurs mis entre crochets donnent naissance à des

produits infinis convergents dont le premier peut, en groupant les termes où n a des valeurs égales et de signes contraires, et en tenant compte de l'identité

$$\cos(a-b)\cos(a+b) = \cos^2 a - \sin^2 b,$$

s'écrire

$$\cos\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\cos^2\dfrac{\pi n\omega_3}{\omega_1}}\right];$$

d'ailleurs la valeur du second s'écrit immédiatement; on a donc finalement

$$\sigma_1 u . e^{\frac{u^2}{2}p\omega_1} = \cos\frac{\pi u}{2\omega_1}\, e^{\frac{\pi^2 u^2}{8\omega_1^2}\left(1+2\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\cos^2\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1}}\right)}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\cos^2\dfrac{\pi n\omega_3}{\omega_1}}\right].$$

On a de même, pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$,

$$\sigma_2 u . e^{\frac{u^2}{2}p\omega_2} = e^{\frac{\pi^2 u^2}{4\omega_1^2}\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\cos^{-2}\pi\frac{2n-1}{2}\frac{\omega_3}{\omega_1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\cos^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}}\right],$$

$$\sigma_3 u . e^{\frac{u^2}{2}p\omega_3} = e^{\frac{\pi^2 u^2}{4\omega_1^2}\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\sin^{-2}\pi\frac{2n-1}{2}\frac{\omega_3}{\omega_1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}}\right].$$

En remplaçant, dans les trois formules que nous venons d'établir, u par $u+2\omega_1$ par exemple, en tenant compte des formules (XII_2) et en comparant les nouvelles formules aux anciennes, on obtient les trois identités

$$(\mathrm{XVII}_2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\eta_1+\omega_1 p\omega_1 &= \frac{\pi^2}{4\omega_1}\left(1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\cos^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right),\\
\eta_1+\omega_1 p\omega_2 &= \frac{\pi^2}{2\omega_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\cos^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}},\\
\eta_1+\omega_1 p\omega_3 &= \frac{\pi^2}{2\omega_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}},
\end{aligned}\right.$$

qui permettent d'écrire comme il suit les trois formules obtenues

$$
(\mathrm{XVII})\quad
\begin{cases}
(3)\quad \sigma_1 u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cos\dfrac{\pi u}{2\omega_1} \displaystyle\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \dfrac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\cos^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}} \right], \\[3ex]
(4)\quad \sigma_2 u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \displaystyle\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \dfrac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\cos^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}} \right], \\[3ex]
(5)\quad \sigma_3 u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \displaystyle\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \dfrac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}} \right].
\end{cases}
$$

En développant les seconds membres de ces dernières relations suivant les puissances de u, on obtiendra autant de termes que l'on voudra dans le développement en séries entières en u, des fonctions paires $\sigma_\alpha u$, sans apercevoir toutefois la loi de formation des coefficients. Si l'on tient compte des trois identités précédentes, on verra par exemple, sans peine, que le coefficient de u^2 est égal à $-\frac{e_\alpha}{2}$, de sorte que

$$\sigma_\alpha u = 1 - \frac{1}{2} e_\alpha u^2 + \ldots .$$

On retombe ainsi, par une autre voie, sur le développement (XI_7) déjà obtenu au n° 111.

119. Nous réunirons ici quelques remarques relatives à l'homogénéité, qui nous seront utiles plus tard.

Imaginons que l'on forme d'abord les fonctions σ, ζ, p et les constantes η_α, e_α qui en dépendent, au moyen des quantités ω_1, ω_3, puis que l'on forme les fonctions et constantes analogues au moyen des quantités

$$(\mathrm{XVIII}_1)\qquad \omega'_1 = \lambda\omega_1, \qquad \omega'_3 = \lambda\omega_3, \qquad \omega'_2 = -\omega'_1 - \omega'_3,$$

et désignons par η'_α, e'_α les quantités analogues à η_α, e_α relatives aux nouvelles fonctions. Cherchons comment les nouvelles fonctions et les nouvelles constantes s'expriment au moyen des anciennes.

Les équations d'homogénéité (III) peuvent s'écrire

$$(\mathrm{XVIII}_2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma(u \mid \omega_1', \omega_3') &= \lambda\, \sigma\left(\frac{u}{\lambda} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right),\\ \zeta(u \mid \omega_1', \omega_3') &= \frac{1}{\lambda}\, \zeta\left(\frac{u}{\lambda} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right),\\ p(u \mid \omega_1', \omega_3') &= \frac{1}{\lambda^2}\, p\left(\frac{u}{\lambda} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right). \end{aligned}\right.$$

En faisant $u = \omega_1'$, $u = \omega_3'$ et en se reportant aux définitions des quantités

$$\eta_1', \quad \eta_3', \quad \eta_2' = -\eta_1' - \eta_3', \qquad e_1', \quad e_3', \quad e_2' = -e_1' - e_3',$$

on en conclut les relations

$$(\mathrm{XVIII}_1\ bis)\qquad \eta_\alpha' = \frac{\eta_\alpha}{\lambda}, \qquad e_\alpha' = \frac{e_\alpha}{\lambda^2}.$$

Si maintenant on se reporte à la formule qui définit $\sigma_\alpha(u \mid \omega_1', \omega_3')$, savoir

$$\sigma(u + \omega_\alpha' \mid \omega_1', \omega_3') = e^{\eta_\alpha' u}\, \sigma(\omega_\alpha' \mid \omega_1', \omega_3')\, \sigma_\alpha(u \mid \omega_1', \omega_3'),$$

on en conclut, à cause des relations précédentes et en particulier de la relation d'homogénéité pour la fonction σ,

$$\sigma\left(\frac{u}{\lambda} + \omega_\alpha \mid \omega_1, \omega_3\right) = e^{\eta_\alpha \frac{u}{\lambda}}\, \sigma(\omega_\alpha \mid \omega_1, \omega_3)\, \sigma_\alpha(u \mid \omega_1', \omega_3'),$$

et, par suite, en comparant à la formule qui définit $\sigma_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_3)$,

$$(\mathrm{XVIII}_3)\qquad \sigma_\alpha(u \mid \omega_1', \omega_3') = \sigma_\alpha\left(\frac{u}{\lambda} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right);$$

mais on a (XI_6)

$$\sqrt{e_\alpha' - e_\beta'} = \frac{\sigma_\beta(\omega_\alpha' \mid \omega_1', \omega_3')}{\sigma(\omega_\alpha' \mid \omega_1', \omega_3')} = \frac{\sigma_\beta(\lambda\omega_\alpha \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3)}{\sigma(\lambda\omega_\alpha \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3)};$$

donc

$$(\mathrm{XVIII}_4)\qquad \sqrt{e_\alpha' - e_\beta'} = \frac{\sigma_\beta(\omega_\alpha \mid \omega_1, \omega_3)}{\lambda\, \sigma(\omega_\alpha \mid \omega_1, \omega_3)} = \frac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}{\lambda},$$

ce qui s'accorde d'ailleurs avec les résultats antérieurs.

Ainsi les quantités η_α, $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$ sont des fonctions homogènes

de ω_1, ω_3 et du degré -1; le rapport de deux de ces quantités ne dépend que de $\frac{\omega_3}{\omega_1}$.

120. Nous terminerons ce paragraphe en disant quelques mots d'un cas particulier, très important d'ailleurs, de façon à permettre au lecteur, au moins dans ce cas, de se représenter l'ensemble des résultats acquis d'une façon moins abstraite.

Supposons ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ réels et positifs. Si l'on suppose en outre que la variable u soit réelle, on voit que la fonction σu est réelle. Cela résulte aisément de la première définition de σu, en groupant ensemble les facteurs pour lesquels les valeurs de s sont conjuguées, c'est-à-dire sont égales à

$$2m\omega_1 + 2n\omega_3 \qquad \text{et} \qquad 2m\omega_1 - 2n\omega_3;$$

d'ailleurs la chose apparaît nettement sur la formule (X_1); la formule (X_4) montre que η_1 est alors réel et positif. Les fonctions ζu, pu sont aussi des fonctions réelles; les invariants g_2 et g_3 sont réels; $\frac{\eta_3}{i}$ est réel et négatif (X_5); $e_1 = p\omega_1$, $e_3 = p\omega_3$ sont des quantites réelles, puisque pu est une fonction paire; e_2 est donc aussi réelle; les formules (XVII) montrent que les fonctions $\sigma_\alpha u$ sont aussi des fonctions réelles.

Examinons maintenant le signe des fonctions σ dans la même hypothèse.

Quand u croît à partir de zéro, σu augmente d'abord, puisque $\sigma'(0) = 1$; cette fonction commence par être positive et reste positive tant que u n'a pas atteint le premier zéro $2\omega_1$ de σu; ce zéro est simple : donc, si u continue de grandir, σu change de signe. Dans l'intervalle $(0, 2\omega_1)$, σu est positive; dans l'intervalle $(2\omega_1, 4\omega_1)$, σu est négative, et ainsi de suite. Pour $u = 0$, la fonction $\sigma_1 u$ est égale à un; elle reste positive jusqu'à ce que u atteigne la valeur ω_1, puis elle est négative dans l'intervalle $(\omega_1, 3\omega_1)$, etc. Les fonctions $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, qui sont égales à 1 pour $u = 0$, restent positives pour toutes les valeurs réelles de u, puisque leurs zéros sont imaginaires.

Considérons de même les valeurs purement imaginaires $u = iu'$

de l'argument; la fonction $\frac{\sigma u}{i}$ est réelle, et l'on voit de même qu'elle est positive quand u' est compris dans l'intervalle $\left(0, \frac{2\omega_3}{i}\right)$, négative quand u' est compris dans l'intervalle $\left(\frac{2\omega_3}{i}, \frac{4\omega_3}{i}\right)$, etc. Pour ces mêmes valeurs, les fonctions paires $\sigma_\alpha u$ sont réelles; si u' est positif et voisin de zéro, les trois fonctions sont positives; $\sigma_1 u$ et $\sigma_2 u$, n'ayant pas de zéros qui soient purement imaginaires, restent toujours positives; au contraire, $\sigma_3 u$ admet comme zéros purement imaginaires les multiples impairs de ω_3, en sorte que cette fonction est positive quand u' est compris entre zéro et $\frac{\omega_3}{i}$, négative quand u' est compris entre $\frac{\omega_3}{i}$ et $3\frac{\omega_3}{i}$, etc.

121. Si l'on se reporte aux formules (XI_6)

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1}, \qquad \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1}, \qquad \sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3},$$

on voit par ce qui précède que $\sqrt{e_1 - e_3}$, $\sqrt{e_1 - e_2}$ sont des quantités réelles et positives; au contraire, $\sqrt{e_3 - e_2}$ est une imaginaire pure et $i\sqrt{e_3 - e_2}$ est une quantité positive, puisque $\sigma_2 \omega_3$ est positif ainsi que $\frac{\sigma \omega_3}{i}$; $\sqrt{e_2 - e_3}$, qui est égal à $-i\sqrt{e_3 - e_2}$ (XIII_4), est donc un nombre négatif. On déduit de là d'abord que les quantités réelles e_1, e_2, e_3 sont rangées par ordre de grandeur décroissante; leur somme étant nulle, la première est positive, la dernière négative. Enfin, des trois radicaux à valeur réelle

$$\sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_2}, \quad \sqrt{e_2 - e_3},$$

les deux premiers ont la signification arithmétique, tandis que le troisième est négatif (1).

---

(1) C'est là l'inconvénient du système de notations que nous avons adopté et sur lequel nous nous sommes expliqués dans la Préface. M. Weierstrass, suivi en cela par M. Schwarz, au lieu des quantités ω_1, ω_3, ω_2, avait introduit les quantités ω, ω', $\omega'' = \omega + \omega'$; on fait coïncider les deux notations en supposant $\omega = \omega_1$, $\omega' = \omega_3$, $\omega'' = -\omega_2$, puis $\eta = \eta_1$, $\eta' = \eta_3$, $\eta'' = -\eta_2$. Dans les *Formeln und Lehrsätze* de M. Schwarz, $\sqrt{e_2 - e_1}$ et $\sqrt{e_2 - e_3}$ représentent les quantités que nous désignons par les mêmes symboles, *changées de signe*.

122. Considérons maintenant la fonction pu. Si u est réel et un peu plus grand que zéro, pu a des valeurs positives très grandes, puisque, dans les environs de $u=0$, la différence $pu-\frac{1}{u^2}$ reste finie. Reportons-nous aux formules (XI),

$$p'u=-2\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}=-2\sqrt{pu-e_1}\sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3};$$

on voit que, dans l'intervalle $(0, \omega_1)$, $p'u$ est négatif; pu décroît donc de $+\infty$ à e_1; si u continue de croître, $\sigma_1 u$ change de signe, et, dans l'intervalle $(\omega_1, 2\omega_1)$, pu croît de e_1 à $+\infty$; ensuite, à cause de la périodicité, pu reprend les mêmes valeurs. Ainsi, pour des valeurs réelles de u, la fonction pu reste supérieure à e_1, e_2, e_3, ce que, d'ailleurs, la formule (XI_4) met en évidence.

Envisageons aussi les valeurs iu' purement imaginaires de l'argument u; la fonction paire pu est réelle pour ces valeurs; pour de petites valeurs de u', elle a des valeurs négatives très grandes. La dérivée de $p(iu')$ par rapport à u' est d'ailleurs

$$i\,p'(iu')=-2i\frac{\sigma_1 iu'\,\sigma_2 iu'\,\sigma_3 iu'}{\sigma^3 iu'},$$

en désignant par $p'(iu')$ ce que devient $p'u$ quand on y remplace u par iu'; quand u' est compris entre 0 et $\frac{\omega_3}{i}$, les trois fonctions $\sigma_1(iu')$, $\sigma_2(iu')$, $\sigma_3(iu')$ sont positives, ainsi que $\frac{\sigma(iu')}{i}$; par suite, $\frac{\sigma^3(iu')}{i}$ est négative, donc la dérivée $ip'(iu')$ de $p(iu')$ par rapport à u' reste positive; donc, quand u' croît de 0 à $\frac{\omega_3}{i}$, $p(iu')$ croît de $-\infty$ à e_3. Lorsque u' traverse la valeur $\frac{\omega_3}{i}$, $\sigma_3(iu')$ s'annule et change de signe : donc, lorsque u' croît de $\frac{\omega_3}{i}$ à $2\frac{\omega_3}{i}$, $p(iu')$ décroît de e_3 à $-\infty$. La fonction reprend ensuite périodiquement les mêmes valeurs.

On a d'ailleurs (VII_{4-5})

$$[i\,p'(iu')]^2=-4[p(iu')-e_1][p(iu')-e_2][p(iu')-e_3]$$

et, par suite, lorsque u' est compris entre 0 et $\frac{\omega_3}{i}$,

$$i\,p'(iu')=\frac{d}{du'}p(iu')=2\sqrt{[e_1-p(iu')][e_2-p(iu')][e_3-p(iu')]},$$

en attribuant au radical le sens arithmétique, puisque le premier membre doit être positif.

Il résulte de cette analyse que l'on a

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}},$$

$$\frac{\omega_3}{i} = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dy}{2\sqrt{(e_1-y)(e_2-y)(e_3-y)}} = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dy}{\sqrt{-(4y^3-g_2y-g_3)}},$$

les radicaux étant pris avec le sens arithmétique.

On a donc exprimé, dans ce cas particulier, ω_1, ω_3 au moyen de g_2, g_3; on a résolu en quelque sorte, par rapport à ω_1, ω_3, les équations (IV_5); mais il reste évidemment à résoudre la question suivante, qui se pose d'elle-même.

Étant données [1] les quantités réelles g_2, g_3, telles que l'équation

$$4y^3 - g_2 y - g_3 = 0$$

ait ses racines réelles, désignons ces racines, rangées par ordre de grandeur décroissante, par e_1, e_2, e_3; déterminons les quantités ω_1, ω_3 par les formules précédentes; aura-t-on effectivement

$$g_2 = 60 \sum_s{}^{(\prime)} \frac{1}{s^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_s{}^{(\prime)} \frac{1}{s^6}\,?$$

C'est là en effet ce qui a lieu. Quoiqu'il ne soit pas difficile de le démontrer, nous renvoyons cette démonstration à plus tard, afin de pouvoir réunir ce qui concerne les différents cas.

Observons enfin, en restant toujours dans le même cas, et relativement à la fonction pu, que, à cause de la relation (VII_1), qui montre que l'on a, a et b étant réels,

$$p(a-bi) - p(a+bi) = \frac{\sigma 2a\, \sigma 2bi}{\sigma^2(a-bi)\,\sigma^2(a+bi)},$$

la quantité $p(a+bi)$ ne peut être réelle que si le facteur $\sigma 2bi$ est nul; ceci ne peut avoir lieu que si b est un multiple de $\frac{\omega_3}{i}$, et, s'il en est ainsi, $p(a+bi)$ est en effet une quantité réelle.

---

[1] Jusqu'ici, ω_1 et ω_3 étaient les quantités données.

V. — Transformation linéaire des fonctions σ. — Substitution aux périodes primitives de périodes équivalentes.

123. On a vu déjà, sur de nombreux exemples, le parti que l'on peut tirer de l'application à la fonction σu de ce théorème : dans un produit infini, absolument convergent, on peut intervertir l'ordre des facteurs et grouper ces facteurs comme l'on veut; c'est là le grand avantage des notations de M. Weierstrass sur celles d'Eisenstein. D'autres conséquences essentielles de cette proposition vont apparaître dans ce qui suit; elles se rapportent aux éléments de la théorie de la transformation.

Nous avons montré comment on pouvait construire une fonction σu au moyen d'un couple de deux nombres à rapport imaginaire $2\omega_1$, $2\omega_3$ et engendrer, au moyen de cette fonction, une fonction doublement périodique admettant $2\omega_1$, $2\omega_3$ pour périodes primitives; nous allons montrer (n° 125) comment il existe une infinité de nombres $2\Omega_1$, $2\Omega_3$, liés simplement à $2\omega_1$, $2\omega_3$, au moyen desquels on peut engendrer les *mêmes* fonctions σu, ζu, pu.

Mais voici d'abord quelques remarques et définitions qui vont nous servir à caractériser ces nombres $2\Omega_1$, $2\Omega_3$.

Soit, en général, $F(u)$ une fonction univoque doublement périodique et admettant $2\omega_1$, $2\omega_3$ pour couple primitif de périodes.

Posons

$$(\mathrm{XIX}_1) \qquad \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

en désignant par a, b, c, d des entiers tels que le déterminant $\mathfrak{D} = ad - bc$ ne soit pas nul. On observera d'abord que, dans le rapport $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$, le coefficient de i est différent de zéro et qu'il a le même signe que dans le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, ou le signe contraire, suivant que $ad - bc$ est positif ou négatif. Si l'on suppose, en effet,

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \alpha + \beta i, \qquad \frac{\Omega_3}{\Omega_1} = A + Bi,$$

α, β, A, B étant réels, on a

$$B = \frac{(ad - bc)\beta}{(a + b\alpha)^2 + b^2\beta^2}.$$

Il est clair que tout nombre de la forme $2\mu\Omega_1 + 2\nu\Omega_3$, où μ, ν sont des entiers, est une période de la fonction $F(u)$, et il est clair aussi qu'un nombre, s'il peut être mis sous cette forme, ne peut l'être que d'une seule façon (puisque le rapport $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$ est imaginaire), et cela même si l'on suppose seulement μ et ν réels.

124. En résolvant par rapport à ω_1, ω_3 les équations qui définissent Ω_1, Ω_3, on obtient

$$\omega_1 = \frac{d}{\mathfrak{D}}\Omega_1 - \frac{b}{\mathfrak{D}}\Omega_3, \qquad \omega_3 = \frac{-c}{\mathfrak{D}}\Omega_1 + \frac{a}{\mathfrak{D}}\Omega_3;$$

les quantités ω_1, ω_3 ne pourront donc être mises sous la forme $\mu\Omega_1 + \nu\Omega_3$, μ et ν étant entiers, que si les coefficients $\frac{d}{\mathfrak{D}}, \frac{-b}{\mathfrak{D}}, \frac{-c}{\mathfrak{D}}, \frac{a}{\mathfrak{D}}$ sont entiers, et s'il en est, par conséquent, de même du déterminant de ces coefficients, c'est-à-dire de

$$\frac{ad - bc}{\mathfrak{D}^2} = \frac{1}{\mathfrak{D}};$$

il faut pour cela que $\mathfrak{D}$ soit égal à ± 1.

Inversement, s'il en est ainsi, il est évident que les quantités $2\omega_1$, $2\omega_3$ et, par suite, toute période de la fonction $F(u)$, pourront être mises sous la forme $2\mu\Omega_1 + 2\nu\Omega_3$, μ et ν étant entiers. En d'autres termes, si l'on continue à désigner par m, n, μ, ν des nombres seulement assujettis à être entiers, on peut affirmer que, si $\mathfrak{D}$ est égal à ± 1, à chaque nombre $2\mu\Omega_1 + 2\nu\Omega_3$ correspond un nombre $2m\omega_1 + 2n\omega_3$, et un seul, qui lui est égal, à savoir celui pour lequel on a

$$m = a\mu + c\nu, \qquad n = b\mu + d\nu,$$

et que, à chaque nombre $2m\omega_1 + 2n\omega_3$, correspond un nombre $2\mu\Omega_1 + 2\nu\Omega_3$, et un seul, savoir celui pour lequel on a

$$\mathfrak{D}\mu = md - nc, \qquad \mathfrak{D}\nu = -mb + na.$$

Lorsque $\mathfrak{D}$ est égal à ± 1, nous dirons que le couple $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$, défini par les formules précédentes, est *équivalent* au couple $(2\omega_1, 2\omega_3)$. Les deux couples sont *proprement* ou *improprement*

équivalents selon que $\mathfrak{D}$ est égal à $+1$ ou à -1 [1]. Nous ne considérerons plus tard que des couples proprement équivalents, afin que le coefficient de i ait le même signe dans $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$ et $\frac{\omega_3}{\omega_1}$; mais, tout d'abord, cette restriction n'est pas nécessaire.

Il convient de remarquer que, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

est égal à ± 1, deux nombres a, b, c, d, pris dans une même ligne ou une même colonne, ne peuvent être pairs simultanément.

Il résulte de ce qui précède que si le couple $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ est équivalent (proprement ou improprement) au couple $2\omega_1$, $2\omega_3$ et si l'on forme un réseau de parallélogrammes au moyen de $2\Omega_1$, $2\Omega_3$, comme on en a formé un au moyen de $2\omega_1$, $2\omega_3$, les sommets des deux réseaux coïncideront; nous laissons au lecteur le soin de montrer que les aires des deux premiers parallélogrammes des deux réseaux sont égales.

125. En supposant toujours les couples $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ et $(2\omega_1, 2\omega_3)$ proprement ou improprement équivalents, nous allons maintenant montrer que les fonctions σu, ζu, $p u$, formées au moyen du couple $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$, sont identiques aux fonctions σu, ζu, $p u$, formées au moyen du couple $(2\omega_1, 2\omega_3)$: en d'autres termes, on a

$$\text{(XIX)} \quad \begin{cases} (2) & \sigma(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma(u \mid \omega_1, \omega_3), \\ (3) & \zeta(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \zeta(u \mid \omega_1, \omega_3), \\ (4) & p(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = p(u \mid \omega_1, \omega_3); \end{cases}$$

les deux dernières égalités sont d'ailleurs des conséquences évidentes de la première.

On vient de voir qu'on pouvait établir entre chaque système de nombres entiers m, n et chaque système de nombres entiers μ, ν une correspondance telle que, si l'on pose

$$s = 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \qquad s = 2\mu\Omega_1 + 2\nu\Omega_3,$$

---

[1] Le lecteur reconnaîtra sans peine que deux couples équivalents à un troisième sont équivalents entre eux.

les nombres s, s soient égaux quand les systèmes (m, n) d'une part, (μ, ν) de l'autre, se correspondent et que, réciproquement, cette égalité n'ait lieu que dans ce cas. D'ailleurs les systèmes $\mu = 0$, $\nu = 0$ et $m = 0$, $n = 0$ se correspondent; par conséquent, les deux produits infinis

$$\prod_s^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}} \right\}$$

et

$$\prod_{\mathrm{s}}^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{\mathrm{s}}\right) e^{\frac{u}{\mathrm{s}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\mathrm{s}^2}} \right\}$$

ne diffèrent que par l'ordre des facteurs; on a donc bien

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma(u \mid \Omega_1, \Omega_3).$$

Le même raisonnement (d'ailleurs inutile) s'applique aux séries qui représentent les fonctions ζu, $\wp u$.

126. Les deux séries entières en u (IV_1), qui représentent $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $\sigma(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ doivent donc être identiques terme à terme; c'est d'ailleurs ce qui résulte de l'expression des coefficients; on a, par exemple (IV_5),

$$\frac{1}{60} g_2 = \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4}, \qquad \frac{1}{140} g_3 = \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6},$$

et il est manifeste que la substitution des nombres s aux nombres s ne change pas la somme des séries qui figurent aux seconds membres; l'ordre des termes seul est modifié. C'est ce qui justifie la dénomination d'*invariants* donnée aux nombres g_2, g_3.

127. Voyons maintenant quelle modification apporte aux fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, $\zeta_1 u$, $\zeta_2 u$, $\zeta_3 u$ la substitution du couple de périodes $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ au couple de périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$.

En définissant d'abord, par analogie, un nombre Ω_2 par l'égalité

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0,$$

et posant ensuite

$$(\mathrm{XX}_1)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{H}_1 &= \zeta\Omega_1 = \zeta(a\omega_1 + b\omega_3) = a\eta_1 + b\eta_3, \\ \mathrm{H}_2 &= \zeta\Omega_2 = \zeta(-a\omega_1 - b\omega_3 - c\omega_1 - d\omega_3) = -a\eta_1 - b\eta_3 - c\eta_1 - d\eta_3, \\ \mathrm{H}_3 &= \zeta\Omega_3 = \zeta(c\omega_1 + d\omega_3) = c\eta_1 + d\eta_3, \end{aligned} \right.$$

on obtiendra de nouveau

$$(\mathrm{XX}_2) \qquad \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3 = 0$$

et

$$\mathrm{H}_1 \Omega_3 - \mathrm{H}_3 \Omega_1 = (ad - bc)(\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1) = \pm (\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1),$$

où il faudra prendre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le couple $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ est proprement ou improprement équivalent au couple primitif $2\omega_1$, $2\omega_3$. Quoi qu'il en soit, $\mathrm{H}_1\Omega_3 - \mathrm{H}_3\Omega_1$ est donc, comme (n° 92) $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1$, un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$.

Il résulte d'ailleurs du n° 108 que $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1$ est égal à $+\frac{\pi i}{2}$ ou à $-\frac{\pi i}{2}$ suivant que le coefficient de i dans $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est positif ou négatif. Nous avons vu, d'autre part (n° 123), que le signe du coefficient de i est le même ou est opposé dans les deux rapports $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ et $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$, suivant que le couple $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ est proprement ou improprement équivalent au couple $2\omega_1$, $2\omega_3$. Donc, dans les deux cas, on a

$$(\mathrm{XX}_3) \qquad \mathrm{H}_1 \Omega_3 - \mathrm{H}_3 \Omega_1 = \pm \frac{\pi i}{2},$$

où il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le coefficient de i dans le rapport $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$ est positif ou négatif.

128. En désignant toujours par s l'une quelconque des valeurs $2\mu\Omega_1 + 2\nu\Omega_3$, où μ et ν sont deux entiers quelconques, on voit que le nombre

$$s - \Omega_1 = (2\mu a + 2\nu c)\,\omega_1 + (2\mu b + 2\nu d)\,\omega_3 - a\omega_1 - b\omega_3$$

est congru *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$ à quelqu'un des nombres $s - \omega_1$, $s - \omega_2$, $s - \omega_3$; on sera dans le premier cas si a est impair et b pair, dans le second si a et b sont impairs, dans le troisième si a est pair et b impair.

Supposons, pour fixer le langage, qu'on soit dans le premier cas. Si l'on se reporte à la formule (V_1), on aura, en y remplaçant

a par ω_1,

$$\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma\omega_1} e^{-u\eta_1+\frac{u^2}{2}p\omega_1} = \prod_s \left\{ \left(1-\frac{u}{s-\omega_1}\right) e^{\frac{u}{s-\omega_1}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-\omega_1)^2}} \right\}.$$

Si, dans le second membre, on remplace s par s et ω_1 par Ω_1, on voit de suite, par un raisonnement identique à celui du n° 124, que, à chaque système d'entiers m, n, on peut faire correspondre un système d'entiers μ, ν, de manière que les nombres $s-\omega_1$, $\mathrm{s}-\Omega_1$ soient égaux si les deux systèmes se correspondent et que, réciproquement, cette égalité n'ait lieu que dans ce cas; le second produit infini a donc la même valeur que le premier et l'on a

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma(u+\omega_1\,|\,\omega_1,\omega_3)}{\sigma(\omega_1\,|\,\omega_1,\omega_3)} e^{-u\eta_1+\frac{u^2}{2}p(\omega_1\,|\,\omega_1,\omega_3)} \\ &= \frac{\sigma(u+\Omega_1\,|\,\Omega_1,\Omega_3)}{\sigma(\Omega_1\,|\,\Omega_1,\Omega_3)} e^{-u\mathrm{H}_1+\frac{u^2}{2}p(\Omega_1\,|\,\Omega_1,\Omega_3)}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$p(u\,|\,\omega_1,\omega_3) = p(u\,|\,\Omega_1,\Omega_3),$$

et, dans le cas qui nous occupe, où a est impair et b pair, on a évidemment

$$p(\Omega_1\,|\,\omega_1,\omega_3) = p(\omega_1\,|\,\omega_1,\omega_3) = e_1.$$

Si donc on se reporte à la définition de la fonction $\sigma_1 u$ (n° 110), on voit que, dans ce cas, l'on a

$$\sigma_1(u\,|\,\Omega_1,\Omega_3) = \sigma_1(u\,|\,\omega_1,\omega_3).$$

D'ailleurs, comme $ad-bc$ est égal à ± 1, d est, dans le cas qui nous occupe, nécessairement impair.

Si c est pair, on a

$$\begin{aligned} p(\Omega_2\,|\,\Omega_1,\Omega_3) &= p(\omega_2\,|\,\omega_1,\omega_3) = e_2, \\ p(\Omega_3\,|\,\Omega_1,\Omega_3) &= p(\omega_3\,|\,\omega_1,\omega_3) = e_3; \end{aligned}$$

donc, en remplaçant a par ω_2 dans la formule (V_1) et raisonnant comme tout à l'heure, on aura

$$\begin{aligned} \sigma_2(u\,|\,\Omega_1,\Omega_3) &= \sigma_2(u\,|\,\omega_1,\omega_3), \\ \sigma_3(u\,|\,\Omega_1,\Omega_3) &= \sigma_3(u\,|\,\omega_1,\omega_3). \end{aligned}$$

Si, au contraire, c est impair, on a

$$p(\Omega_2 \mid \Omega_1, \Omega_3) = p(\omega_3 \mid \omega_1, \omega_3) = e_3,$$
$$p(\Omega_3 \mid \Omega_1, \Omega_3) = p(\omega_2 \mid \omega_1, \omega_3) = e_2,$$

et l'on parvient aux relations

$$\sigma_2(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_3(u \mid \omega_1, \omega_3),$$
$$\sigma_3(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_2(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

La même démonstration s'applique à tous les cas, et l'on reconnaît que la substitution des périodes $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, ou laisse les fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ invariables ou ne fait que les remplacer par les mêmes fonctions rangées dans un autre ordre qui ne dépend que de la parité des nombres a, b, c, d, à savoir dans l'ordre où il faut placer les quantités e_1, e_2, e_3 pour obtenir les quantités $p\Omega_1$, $p\Omega_2$, $p\Omega_3$. D'une façon plus explicite, voici le résultat auquel conduit l'examen de ces divers cas.

Soient

$$(\mathrm{XX}_4) \quad \begin{cases} p\omega_1 = e_1, & p\omega_2 = e_2, & p\omega_3 = e_3, \\ p\Omega_1 = \mathrm{E}_1 = e_\lambda, & p\Omega_2 = \mathrm{E}_2 = e_\mu, & p\Omega_3 = \mathrm{E}_3 = e_\nu. \end{cases}$$

On aura

$$(\mathrm{XX}_5) \quad \begin{cases} \sigma_1(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_\lambda(u \mid \omega_1, \omega_3), \\ \sigma_2(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_\mu(u \mid \omega_1, \omega_3), \\ \sigma_3(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_\nu(u \mid \omega_1, \omega_3), \end{cases}$$

où λ, μ, ν sont les nombres entiers 1, 2, 3 rangés dans un ordre que détermine le Tableau suivant :

(XX_6)

	a	b	c	d	Ω_1	Ω_2	Ω_3	λ	μ	ν
1°	1	0	0	1	ω_1	ω_2	ω_3	1	2	3
2°	1	0	1	1	ω_1	ω_3	ω_2	1	3	2
3°	1	1	0	1	ω_2	ω_1	ω_3	2	1	3
4°	1	1	1	0	ω_2	ω_3	ω_1	2	3	1
5°	0	1	1	0	ω_3	ω_2	ω_1	3	2	1
6°	0	1	1	1	ω_3	ω_1	ω_2	3	1	2

Au-dessous de a, b, c, d, dans chaque ligne horizontale, sont les restes de la division de ces nombres par 2. Sur la même ligne, au-dessous de Ω_1, Ω_2, Ω_3, sont celles des quantités ω_1, ω_2, ω_3, qui sont congrues respectivement à Ω_1, Ω_2, Ω_3 *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$. Sur la même ligne encore, au-dessous de λ, μ, ν, sont les valeurs par lesquelles doivent être remplacés ces indices, tant dans $\sigma_\lambda u$, $\sigma_\mu u$, $\sigma_\nu u$ que dans e_λ, e_μ, e_ν; enfin, pour la commodité de ce qui suit, chaque ligne horizontale porte un numéro d'ordre qui permettra de désigner le cas correspondant.

Il est à peine utile d'ajouter que la substitution du nouveau couple de périodes au couple primitif ne fait que changer les fonctions $\zeta_1 u$, $\zeta_2 u$, $\zeta_3 u$ dans le même ordre que les fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

129. Posons (XI_6)

$$\sqrt{\mathrm{E}_\beta - \mathrm{E}_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha(\Omega_\beta \mid \Omega_1, \Omega_3)}{\sigma(\Omega_\beta \mid \Omega_1, \Omega_3)};$$

puisque les quantités E_1, E_2, E_3 ne sont autres que les quantités e_1, e_2, e_3 rangées dans un certain ordre, il est clair que les six différences $\mathrm{E}_\beta - \mathrm{E}_\alpha$ ne sont autres que les six différences $e_{\beta'} - e_{\alpha'}$ rangées dans un ordre convenable, que l'on déterminera sans peine, dans chaque cas particulier, à l'aide du Tableau précédent; mais il importe de remarquer que si l'on a, par exemple,

$$\mathrm{E}_\beta = e_{\beta'}, \qquad \mathrm{E}_\alpha = e_{\alpha'},$$

on ne peut en aucune façon affirmer que l'on a

$$\sqrt{\mathrm{E}_\beta - \mathrm{E}_\alpha} = \sqrt{e_{\beta'} - e_{\alpha'}},$$

en adoptant pour chacun des radicaux la signification précise qu'exige la formule (XI_6); on sait seulement que l'on doit avoir

$$\sqrt{\mathrm{E}_\beta - \mathrm{E}_\alpha} = \pm\sqrt{e_{\beta'} - e_{\alpha'}};$$

la détermination du signe qu'il faut adopter dépend de la valeur des restes de la division des nombres a, b, c, d par 4. Nous allons montrer, dans un cas particulier, comment se fait cette détermi-

nation, et nous réunirons tous les résultats dans un Tableau; le lecteur n'aura aucune peine à vérifier ces résultats. Pour éviter toute ambiguïté, nous conserverons la notation $\sqrt{\mathrm{E}_\beta - \mathrm{E}_\alpha}$ quand même nous saurons, dans chaque cas particulier, auxquelles des racines e_1, e_2, e_3 sont respectivement égales les quantités E_β, E_α, parce que, autrement, on serait amené à écrire deux fois le même symbole, un radical carré portant sur une différence de deux des quantités e_1, e_2, e_3, avec *deux sens différents*.

Enfin, dans ce numéro, nous supposerons que le coefficient de i dans $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est positif, et que $ad - bc$ est égal à 1; le lecteur traitera sans peine les autres cas. Dès lors, le coefficient de i dans $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$ sera aussi positif, en sorte que les formules (XIII_4) s'appliquent aussi bien aux quantités $\sqrt{\mathrm{E}_\alpha - \mathrm{E}_\beta}$ qu'aux quantités $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$; en d'autres termes, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2} &= i\sqrt{\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3},\\
\sqrt{\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1} &= -i\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3},\\
\sqrt{\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1} &= i\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2},
\end{aligned}$$

et il suffira d'avoir les résultats pour les trois radicaux $\sqrt{\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3}$, $\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3}$, $\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}$.

Nous désignerons, pour abréger, par a', b', c', d' les quotients entiers de la division par 2 des nombres a, b, c, d pris de façon que le reste soit toujours 0 ou 1; par exemple, dans le cas 2° du Tableau ($\lambda = 1$, $\mu = 3$, $\nu = 2$), on aura

$$\begin{aligned}
a &= 2a' + 1, & b &= 2b',\\
c &= 2c' + 1, & d &= 2d' + 1,
\end{aligned}$$

et l'égalité

$$ad - bc = 1$$

montre que l'on a

$$4(a'd' - b'c') + 2a' + 2d' - 2b' = 0;$$

par conséquent, $a' + d' - b'$ est pair, donc aussi $a' + d' + b'$.

A chacun des cas du Tableau correspond un résultat de même nature; tous ces résultats sont compris dans le Tableau suivant où, en face du numéro d'ordre de chaque cas, on a placé la congruence correspondante prise suivant le module 2

1°	$a' + d' \equiv 0,$
2°	$a' + b' + d' \equiv 0,$
3°	$a' + c' + d' \equiv 0,$
4°	$b' + c' + d' + 1 \equiv 0,$
5°	$b' + c' + 1 \equiv 0,$
6°	$a' + b' + c' + 1 \equiv 0.$

Remarquons encore que, en vertu des formules (XII_2), on a, quels que soient les entiers p et q, les relations

$$\frac{\sigma_1(u + 2p\omega_1 + 2q\omega_3)}{\sigma(u + 2p\omega_1 + 2q\omega_3)} = (-1)^q \frac{\sigma_1 u}{\sigma u},$$

$$\frac{\sigma_2(u + 2p\omega_1 + 2q\omega_3)}{\sigma(u + 2p\omega_1 + 2q\omega_3)} = (-1)^{p+q} \frac{\sigma_2 u}{\sigma u},$$

$$\frac{\sigma_3(u + 2p\omega_1 + 2q\omega_3)}{\sigma(u + 2p\omega_1 + 2q\omega_3)} = (-1)^p \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}.$$

Ceci posé, revenons au cas 2° que nous traitons comme exemple; on a alors, en convenant de ne pas écrire les demi-périodes quand elles sont ω_1, ω_3,

$$\sigma_1(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_1 u,$$

$$\sigma_2(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_3 u,$$

$$\sigma_3(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \sigma_2 u.$$

On aura donc

$$\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3} = \frac{\sigma_3(\Omega_1 \mid \Omega_1, \Omega_3)}{\sigma(\Omega_1 \mid \Omega_1, \Omega_3)} = \frac{\sigma_2(2a'\omega_1 + 2b'\omega_3 + \omega_1)}{\sigma(2a'\omega_1 + 2b'\omega_3 + \omega_1)}$$

$$= (-1)^{a'+b'} \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1} = (-1)^{d'} \sqrt{e_1 - e_2};$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_3} &= \frac{\sigma_3(\Omega_2 \mid \Omega_1, \Omega_3)}{\sigma(\Omega_2 \mid \Omega_1, \Omega_3)} \\ &= \frac{\sigma_2[-2(a'+c'+1)\omega_1-2(b'+d')\omega_3-\omega_3]}{\sigma[-2(a'+c'+1)\omega_1-2(b'+d')\omega_3-\omega_3]} \\ &= (-1)^{a'+b'+c'+d'}\sqrt{e_3-e_2} = i(-1)^{c'}\sqrt{e_2-e_3},\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant des formules (XIII_4); enfin

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2} &= \frac{\sigma_2(\Omega_1 \mid \Omega_1, \Omega_3)}{\sigma(\Omega_1 \mid \Omega_1, \Omega_3)} \\ &= \frac{\sigma_3(2a'\omega_1+2b'\omega_3+\omega_1)}{\sigma(2a'\omega_1+2b'\omega_3+\omega_1)} \\ &= (-1)^{a'}\sqrt{e_1-e_3}.\end{aligned}$$

Les cinq autres cas se traiteront de la même façon, et tous les résultats se trouvent résumés dans le Tableau suivant : la première colonne contient les numéros d'ordre des six cas; la seconde, la troisième et la quatrième colonne contiennent les valeurs de $\sqrt{\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_3}$, $\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}$, $\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2}$.

(XX_7)

	$\sqrt{\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_3}$	$\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}$	$\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2}$
1°	$(-1)^{\frac{a+c-1}{2}}\sqrt{e_2-e_3}$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sqrt{e_1-e_3}$	$(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}\sqrt{e_1-e_2}$
2°	$i(-1)^{\frac{c-1}{2}}\sqrt{e_2-e_3}$	$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\sqrt{e_1-e_2}$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sqrt{e_1-e_3}$
3°	$(-1)^{\frac{d+1}{2}}\sqrt{e_1-e_3}$	$(-1)^{\frac{a+1}{2}}\sqrt{e_2-e_3}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}}\sqrt{e_1-e_2}$
4°	$i(-1)^{\frac{c+1}{2}}\sqrt{e_1-e_3}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}}\sqrt{e_1-e_2}$	$(-1)^{\frac{a+1}{2}}\sqrt{e_2-e_3}$
5°	$i(-1)^{\frac{b+d-1}{2}}\sqrt{e_1-e_2}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}}\sqrt{e_1-e_3}$	$i(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}\sqrt{e_2-e_3}$
6°	$(-1)^{\frac{d+1}{2}}\sqrt{e_1-e_2}$	$i(-1)^{\frac{c+1}{2}}\sqrt{e_2-e_3}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}}\sqrt{e_1-e_3}$

VI. — Transformation d'ordre quelconque des fonctions σ. — Substitution aux périodes primitives de périodes nouvelles liées linéairement aux anciennes.

130. Nous avons montré ce que devenaient les fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ quand, au lieu de les former au moyen des demi-périodes ω_1, ω_3, on les formait au moyen des demi-périodes $a\omega_1 + b\omega_3$, $c\omega_1 + d\omega_3$, où a, b, c, d sont des entiers liés par la relation

$$ad - bc = 1.$$

Il est naturel de chercher, d'une façon plus générale, quel lien existe entre les fonctions

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3), \qquad \sigma_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_3) \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

d'une part, et les fonctions

$$\sigma(u \mid \Omega_1, \Omega_3), \qquad \sigma_\alpha(u \mid \Omega_1, \Omega_3) \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

d'autre part, lorsqu'on suppose

$$\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

où a, b, c, d sont des nombres entiers assujettis seulement à cette condition que le déterminant

$$ad - bc = \mathfrak{D}$$

ne soit pas nul.

Le problème peut d'ailleurs être notablement simplifié. Nous prouverons en effet, dans le numéro suivant, que, si l'on suppose ω_1, ω_3, Ω_1, Ω_3 liés par les relations qui précèdent, il existe, d'une part, un système (ω'_1, ω'_3) proprement équivalent à (ω_1, ω_3), de l'autre, un système (Ω'_1, Ω'_3) proprement équivalent à (Ω_1, Ω_3), tels que l'on ait

$$\Omega'_1 = \lambda\omega'_1, \qquad \Omega'_3 = \mu\omega'_3,$$

λ, μ étant des nombres entiers assujettis seulement à ces deux conditions : 1° leur produit est égal à $\mathfrak{D}$; 2° leur plus grand commun diviseur est le même que celui des nombres a, b, c, d.

Dès lors on voit que le problème posé sera résolu si l'on sait

quel lien existe entre les fonctions

$$\sigma(u \mid \omega_1', \omega_3'), \qquad \sigma_\alpha(u \mid \omega_1', \omega_3')$$

et les fonctions

$$\sigma(u \mid \lambda\omega_1', \mu\omega_3'), \qquad \sigma_\alpha(u \mid \lambda\omega_1', \mu\omega_3'),$$

et ce dernier problème se décompose lui-même en deux : passer des fonctions σ, σ_1, σ_2, σ_3, formées avec un système de demi-périodes ω_1, ω_3, aux mêmes fonctions formées avec les mêmes demi-périodes dont l'une ou l'autre est multipliée par un nombre entier ou divisée par un nombre entier. Comme le système (ω_1, ω_3) est improprement équivalent au système $(-\omega_1, \omega_3)$, on voit même que l'on peut se borner au cas dans lequel le multiplicateur (ou le diviseur) est un nombre entier positif. C'est le problème qui nous occupera quand nous aurons démontré le théorème annoncé.

131. Ce théorème, si l'on ne tient pas compte pour un moment des conditions imposées aux nombres λ, μ, revient à dire que, en supposant Ω_1, Ω_3 définies par les relations

$$(a) \qquad \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

où a, b, c, d sont des entiers tels que

$$(b) \qquad \mathbb{D} = ad - bc$$

ne soit pas nul, il existe des nombres entiers α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' liés par les relations

$$(c) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$$

et tels que les relations (a), jointes aux suivantes

$$(d) \qquad \begin{cases} \omega_1' = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_3, & \omega_3' = \gamma\,\omega_1 + \delta\,\omega_3, \\ \Omega_1' = \alpha'\Omega_1 + \beta'\Omega_3, & \Omega_3' = \gamma'\Omega_1 + \delta'\Omega_3, \end{cases}$$

entraînent les relations

$$(a') \qquad \Omega_1' = \lambda\omega_1', \qquad \Omega_3' = \mu\omega_3',$$

où λ, μ sont des entiers. Cela revient encore à dire qu'on peut satisfaire, au moyen des nombres entiers α, β, γ, δ, α', β', γ',

δ', λ, μ aux relations (c), d'une part, et, de l'autre, aux relations

$$(e)\qquad \begin{cases} a\alpha'+c\beta'=\lambda\alpha, & b\alpha'+d\beta'=\lambda\beta, \\ a\gamma'+c\delta'=\mu\gamma, & b\gamma'+d\delta'=\mu\delta, \end{cases}$$

qui s'obtiennent en éliminant ω'_1, ω'_3, Ω'_1, Ω'_3 entre les relations (a), (a'), (d), ce qui fournit les équations

$$\alpha'(a\omega_1+b\omega_3)+\beta'(c\omega_1+d\omega_3)=\lambda(\alpha\omega_1+\beta\omega_3),$$
$$\gamma'(a\omega_1+b\omega_3)+\delta'(c\omega_1+d\omega_3)=\mu(\gamma\omega_1+\delta\omega_3),$$

et en écrivant ensuite que les coefficients de ω_1, ω_3 sont respectivement égaux dans les deux membres.

Des équations (e), on déduit d'ailleurs immédiatement

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\lambda\mu=(ad-bc)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma'),$$

ce qui montre, en tenant compte des relations (c), que l'on doit avoir

$$(f)\qquad \lambda\mu=\mathfrak{D}.$$

Ceci posé, supposons d'abord que a, c soient premiers entre eux et choisissons deux entiers arbitraires x, y tels que l'on ait

$$ax+cy=1;$$

on tirera de là et de la première des équations (e)

$$a(\alpha'-\lambda\alpha x)+c(\beta'-\lambda\alpha y)=0,$$

d'où l'on déduit sans peine qu'on doit avoir

$$(g)\qquad \alpha'=\lambda\alpha x+hc,\qquad \beta'=\lambda\alpha y-ha,$$

h étant un entier arbitraire; ces formules fournissent d'ailleurs la solution la plus générale de la première équation (e) quand on y regarde α', β' comme les seules inconnues. Si, dans la troisième équation (e), on regarde de même γ', δ' comme les inconnues, la solution la plus générale de ces équations sera fournie par les formules

$$(g)\qquad \gamma'=\mu\gamma x+kc,\qquad \delta'=\mu\gamma y-ka,$$

k étant un entier arbitraire.

Si l'on substitue, dans la deuxième et la quatrième des équations (e), les valeurs de α', β', γ', δ' données par les quatre formules (g), on trouvera, après des réductions faciles, en tenant compte de (f),

$$(h) \qquad \begin{cases} \beta = -h\mu + \alpha(bx + dy), \\ \delta = -k\lambda + \gamma(bx + dy). \end{cases}$$

D'un autre côté, si l'on forme, au moyen des formules (g), l'expression $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$, on trouve de suite qu'elle est égale à

$$(\mu h\gamma - \lambda k\alpha)(ax + cy),$$

ce qui montre que l'on doit avoir

$$(k) \qquad \mu h\gamma - \lambda k\alpha = 1.$$

Inversement, si l'on peut trouver des nombres entiers λ, μ, α, γ, h, k tels que l'on ait

$$\lambda\mu = \mathfrak{D}, \qquad \mu h\gamma - \lambda k\alpha = 1,$$

le problème sera résolu; car, une fois ces entiers trouvés, si l'on détermine β, δ par les équations (h) et α', β', γ', δ' par les formules (g), il résulte de l'analyse précédente que les relations (a) et (d) entraîneront les relations (a').

On voit, à cause de (k), que λ, μ doivent être choisis premiers entre eux; on décomposera donc $\mathfrak{D}$ en un produit de deux facteurs λ, μ premiers entre eux; on choisira ensuite des entiers h, k de façon que les entiers μh et λk soient premiers entre eux; enfin on choisira α, γ de manière à satisfaire à l'équation

$$\mu h\gamma - \lambda k\alpha = 1.$$

On peut prendre en particulier $\lambda = ad - bc$, $\mu = 1$.

132. Supposons maintenant que a et c ne soient pas premiers entre eux, mais que a, b, c, d aient pour plus grand commun diviseur l'unité.

On commencera par substituer à ω_1, ω_3 des nombres proprement équivalents $\omega_1^{(0)}$, $\omega_3^{(0)}$, définis par les équations

$$\omega_1 = p\,\omega_1^{(0)} + q\,\omega_3^{(0)}, \qquad \omega_3 = r\,\omega_1^{(0)} + s\,\omega_3^{(0)},$$

p, q, r, s étant des entiers qui vérifient la relation

$$ps - qr = 1.$$

On aura alors

$$\Omega_1 = a_0 \omega_1^{(0)} + b_0 \omega_3^{(0)}, \qquad \Omega_3 = c_0 \omega_1^{(0)} + d_0 \omega_3^{(0)},$$

en posant

$$a_0 = ap + br, \qquad b_0 = aq + bs,$$
$$c_0 = cp + dr, \qquad d_0 = cq + ds.$$

Or il est aisé de voir qu'on peut choisir les nombres p, r premiers entre eux de façon que a_0, c_0 soient premiers entre eux. Il faut évidemment, pour cela, prendre r premier au plus grand commun diviseur de a et de c, puis p premier d'une part à r, de l'autre au plus grand commun diviseur de b et de d. Si p, r satisfont à ces conditions, il est clair que a_0, c_0 ne peuvent avoir comme diviseur commun un facteur premier divisant soit p, soit r, soit le plus grand commun diviseur de b et d, soit le plus grand commun diviseur de a et c. Nous imposerons encore une autre condition à r.

Décomposons $\mathcal{D}$ en deux facteurs premiers entre eux A et B; A comprendra tous les facteurs premiers de $\mathcal{D}$, pris avec leurs exposants, qui divisent le plus grand commun diviseur de a et c; B sera formé des autres facteurs premiers. Nous prendrons pour r un multiple de B, ce qui n'est évidemment pas contradictoire avec les autres conditions auxquelles p, r restent soumis. Mais, en éliminant p entre les équations qui définissent a_0, c_0, on obtient

$$\mathrm{AB}\,r = ac_0 - ca_0,$$

ce qui montre qu'un diviseur premier de a_0, c_0 devrait diviser A, B ou r. Cela est impossible, puisqu'il ne peut diviser ni r, ni B qui est un diviseur de r, ni A qui est composé des mêmes facteurs premiers que le plus grand commun diviseur entre a, c.

Les nombres premiers entre eux p, r étant ainsi choisis, on choisira q, s parmi les entiers qui vérifient l'équation

$$ps - rq = 1,$$

et l'on aura trouvé le couple $(\omega_1^{(0)}, \omega_3^{(0)})$ satisfaisant aux conditions imposées. Dès lors, puisque a_0, c_0 sont premiers entre eux, on

pourra, comme il a été expliqué plus haut, trouver des nombres ω'_1, ω'_3 proprement équivalents à $\omega_1^{(0)}$, $\omega_3^{(0)}$ et, par suite, à ω_1, ω_3, et des nombres Ω'_1, Ω'_3 proprement équivalents à Ω_1, Ω_3 tels que les relations (a) entraînent les suivantes

$$\Omega'_1 = \lambda\,\omega'_1, \qquad \Omega'_3 = \mu\,\omega'_3,$$

λ, μ étant des entiers assujettis seulement à être premiers entre eux et à avoir pour produit $ad - bc$.

133. Si enfin a, b, c, d ont un plus grand commun diviseur m, on écrira les relations (a) sous la forme

$$\Omega_1 = \frac{a}{m}\,m\omega_1 + \frac{b}{m}\,m\omega_3, \qquad \Omega_3 = \frac{c}{m}\,m\omega_1 + \frac{d}{m}\,m\omega_3,$$

et l'on est assuré, par ce qui précède, de l'existence d'un système $(m\omega'_1, m\omega'_3)$ proprement équivalent à $(m\omega_1, m\omega_3)$ et d'un système (Ω'_1, Ω'_3) proprement équivalent à (Ω_1, Ω_3), tels que les relations précédentes entraînent celles-ci :

$$\Omega'_1 = \lambda\,m\omega'_1, \qquad \Omega'_3 = \mu\,m\omega'_3,$$

λ, μ étant des entiers seulement assujettis à être premiers entre eux et à avoir pour produit $\dfrac{ad-bc}{m^2}$. D'ailleurs, si les systèmes $(m\omega_1, m\omega_3)$ et $(m\omega'_1, m\omega'_3)$ sont proprement équivalents, il est clair qu'il en est de même des systèmes (ω_1, ω_3) et (ω'_1, ω'_3). Puisque le plus grand commun diviseur de λm, μm est m et que le produit de ces deux nombres est $ad - bc$, le théorème énoncé au début est entièrement démontré.

134. Nous allons chercher maintenant à exprimer les fonctions σ, ζ, p formées avec les périodes $\dfrac{2\omega_1}{n}$, $2\omega_3$ au moyen des fonctions σ, ζ, p formées avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$; n est un entier positif.

Partons de l'expression de $\sigma\left(u \,\middle|\, \dfrac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ décomposée en facteurs primaires (II_1)

$$\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = u \prod{}^{(\prime)} \left\{\left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{s^2}}\right\},$$

où l'on suppose

$$\mathrm{s} = 2\mu\frac{\omega_1}{n} + 2\nu\omega_3,$$

et où μ, ν doivent prendre toutes les valeurs entières positives, nulle ou négatives, à l'exclusion de la combinaison $\mu = 0$, $\nu = 0$.

Nous allons grouper ensemble tous les facteurs primaires pour lesquels les nombres μ sont congrus suivant le module n; en multipliant ensuite tous les produits relatifs à n nombres choisis arbitrairement, mais tels que la différence de deux quelconques d'entre eux ne soit pas divisible par n, il est clair que nous aurons employé tous les facteurs primaires de $\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ et que cette fonction sera égale au produit considéré.

Soit d'abord $-r$ un nombre entier quelconque non divisible par n; les nombres μ congrus à $-r$ suivant le module n sont de la forme

$$\mu = \mu' n - r,$$

où μ' est un nombre entier quelconque; les valeurs correspondantes de s sont de la forme

$$\mathrm{s} = s - 2r\frac{\omega_1}{n},$$

en supposant

$$s = 2\mu'\omega_1 + 2\nu\omega_3,$$

et l'on aura tous les nombres s considérés en supposant que μ', ν prennent toutes les valeurs entières sans exception. Le produit de tous les facteurs primaires correspondants sera

$$\prod_s \left\{\left(1 - \frac{u}{s - 2r\frac{\omega_1}{n}}\right) e^{\frac{u}{s-2r\frac{\omega_1}{n}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\left(s-2r\frac{\omega_1}{n}\right)^2}}\right\},$$

et la formule (V_1), dont l'usage est légitime puisque $2r\frac{\omega_1}{n}$ n'est pas l'un des nombres s, montre que ce produit est égal à

$$\frac{\sigma\left(u + 2r\frac{\omega_1}{n}\right)}{\sigma\left(2r\frac{\omega_1}{n}\right)} e^{-u\zeta\left(2r\frac{\omega_1}{n}\right) + \frac{u^2}{2}p\left(2r\frac{\omega_1}{n}\right)},$$

les fonctions σ, ζ, p étant formées au moyen du couple de périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Quant aux facteurs primaires pour lesquels μ est divisible par n, en comprenant le facteur u parmi eux, on voit de suite que leur produit est égal à σu; on a donc, en désignant par $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, $n-1$ nombres entiers tels qu'aucun d'eux ne soit divisible par n, non plus que la différence de deux quelconques d'entre eux

$$\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\zeta\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)+\frac{u^2}{2}\sum\limits_{(r)}p\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)} \sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u+\frac{2r\omega_1}{n}\right)}{\sigma\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}).$$

135. En vertu de la périodicité, $p\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)$ ne change pas quand on augmente r d'un multiple entier de n; par conséquent

$$\sum_{(r)} p\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)$$

ne change pas quand on substitue aux nombres r d'autres entiers satisfaisant aux mêmes conditions; si donc on pose

$$2P_1 = p\left(\frac{2\omega_1}{n}\right) + p\left(\frac{4\omega_1}{n}\right) + \ldots + p\left[\frac{(2n-2)\omega_1}{n}\right],$$

on aura

$$(\mathrm{XXI}_1) \qquad \sum_{(r)} p\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right) = 2P_1 \qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}).$$

De même, à cause de la formule (VI_3), l'expression

$$\zeta\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right) - \frac{2r\eta_1}{n}$$

ne change pas quand on augmente r d'un multiple entier de n; donc l'expression

$$\sum_{(r)} \zeta\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right) - \sum_{(r)} \frac{2r\eta_1}{n}$$

ne change pas quand on substitue aux nombres r d'autres entiers

satisfaisant aux mêmes conditions; si l'on prend pour ces nombres

$$-\frac{n-1}{2},\quad -\frac{n-1}{2}+1,\quad \ldots,\quad -1,\quad +1,\quad +2,\quad \ldots,\quad +\frac{n-1}{2}$$

ou

$$-\frac{n}{2}+1,\quad -\frac{n}{2}+2,\quad \ldots,\quad -1,\quad +1,\quad +2,\quad \ldots,\quad +\frac{n}{2}-1,\quad +\frac{n}{2},$$

suivant que n est impair ou pair, on voit, en se rappelant que ζ est une fonction impaire et que l'on a $\zeta\omega_1 = \eta_1$, que la quantité précédente est toujours nulle; on peut donc écrire

$$(\mathrm{XXI}_2)\qquad \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r\eta_1}{n} + u^2 P_1}\,\sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u + \dfrac{2r\omega_1}{n}\right)}{\sigma\left(\dfrac{2r\omega_1}{n}\right)}.$$

On déduit de là, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$(\mathrm{XXI}_3)\qquad \zeta\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \zeta u + \sum_{(r)} \zeta\left(u + \frac{2r\omega_1}{n}\right) - \sum_{(r)} \frac{2r\eta_1}{n} + 2uP_1;$$

puis, en prenant la dérivée par rapport à u et changeant les signes (¹),

$$(\mathrm{XXI}_4)\qquad \begin{cases} p\left(u \,\middle|\, \dfrac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = pu + \sum\limits_{(r)} p\left(u + \dfrac{2r\omega_1}{n}\right) - 2P_1 \\ (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}). \end{cases}$$

136. Nous poserons, conformément aux notations (XX_{1-2}),

$$(\mathrm{XXI}_5)\qquad H_1 = \zeta\left(\frac{\omega_1}{n} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right),\qquad H_3 = \zeta\left(\omega_3 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right),\qquad H_1 + H_2 + H_3 = 0,$$

$$(\mathrm{XXI}_6)\qquad E_1 = p\left(\frac{\omega_1}{n} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right),\qquad E_3 = p\left(\omega_3 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right),\qquad E_1 + E_2 + E_3 = 0.$$

(¹) Les formules (XXI) ont dû être données par M. Weierstrass dans ses Leçons de 1870-1871. *Voir* l'important Mémoire de M. Kiepert : *Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. XXVI, p. 369). La formule (XXI_4) y est obtenue en prenant pour point de départ la considération des pôles de la fonction $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$; l'égalité entre les deux membres est une conséquence facile du théorème de Liouville; les formules (XXI_3), (XXI_2) sont ensuite obtenues par des intégrations successives. On verra plus tard que la formule (XXI_4) est une conséquence immédiate du théorème de M. Hermite sur la décomposition en éléments simples.

Le calcul des quantités H_1, H_3 se fait sans difficulté. On a (XXI_3)

$$\mathrm{H}_3 = \zeta\omega_3 + \sum_{(r)} \zeta\left(\omega_3 + \frac{2r\omega_1}{n}\right) - \sum_{(r)} \frac{2r\eta_1}{n} + 2\omega_3 \mathrm{P}_1$$

ou, en vertu des relations (XII_5),

$$\mathrm{H}_3 = \eta_3 + (n-1)\eta_3 + \sum_{(r)} \zeta_3\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right) - \sum_{(r)} \frac{2r\eta_1}{n} + 2\omega_3 \mathrm{P}_1;$$

mais la somme

$$\sum_{(r)} \left[\zeta_3\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right) - \frac{2r\eta_1}{n}\right]$$

est nulle, comme on le voit par un raisonnement semblable à celui qui a été fait plus haut : on a donc

$$(\mathrm{XXI}_5) \qquad \mathrm{H}_3 = n\eta_3 + 2\omega_3 \mathrm{P}_1.$$

D'ailleurs, puisque n est positif, les quantités $\mathrm{H}_1\,\omega_3 - \mathrm{H}_3\,\frac{\omega_1}{n}$ et $\eta_1\,\omega_3 - \eta_3\,\omega_1$, qui sont toutes deux égales à $\pm\frac{\pi i}{2}$, sont de même signe : elles sont donc égales. De leur égalité et de la formule précédente on déduit

$$(\mathrm{XXI}_5) \qquad \mathrm{H}_1 = \eta_1 + \frac{2\omega_1}{n}\mathrm{P}_1.$$

137. On peut déduire de la formule fondamentale, par le changement de u en $u + \frac{\omega_1}{n}$, $u - \omega_3 - \frac{\omega_1}{n}$, $u + \omega_3$, des expressions analogues pour les fonctions $\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Nous donnerons un peu plus loin un exemple de ce calcul; mais il est plus commode de déduire ces résultats des expressions de ces fonctions décomposées en facteurs primaires (XVII_1), en employant la même marche que plus haut.

Partons donc de la formule

$$\sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-\frac{\mathrm{E}_1 u^2}{2}} \prod_{s} \left\{\left(1 - \frac{u}{s - \frac{\omega_1}{n}}\right) e^{\frac{u}{s - \frac{\omega_1}{n}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\left(s - \frac{\omega_1}{n}\right)^2}}\right\},$$

où l'on suppose

$$\mathrm{s} = 2\mu\frac{\omega_1}{n} + 2\nu\omega_3,$$

μ, ν devant prendre tous les systèmes de valeurs entières. Soient $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, n entiers tels que la différence de deux quelconques d'entre eux ne soit pas divisible par n; pour faire coïncider ces notations avec les précédentes, il suffira de supposer r_0 divisible par n. Groupons ensemble, dans le produit infini, les facteurs primaires tels que les nombres μ soient congrus à $-r$ suivant le module n; les valeurs de s auxquelles ils correspondent sont données par la formule

$$\mathrm{s} = 2\mu'\omega_1 + 2\nu\omega_3 - 2r\frac{\omega_1}{n} = s - \frac{2r\omega_1}{n},$$

en sorte que, pour l'un de ces facteurs primaires, $\mathrm{s} - \frac{\omega_1}{n}$ peut s'écrire

$$s - (2r+1)\frac{\omega_1}{n}.$$

Le nombre $(2r+1)\frac{\omega_1}{n}$ n'est jamais congru à zéro suivant le système de modules $2\omega_1$, $2\omega_3$; quant aux nombres μ', ν, ils doivent prendre tous les systèmes de valeurs entières; d'après la formule (V_1), le produit de tous ces facteurs primaires sera donc égal à

$$\frac{\sigma\left(u + \frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r-1}{n}\omega_1\right)} e^{-u\zeta\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right) + \frac{u^2}{2}\wp\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}.$$

Par conséquent $\sigma_1\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ sera égal au produit

$$\prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u + \frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}, \qquad (r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}),$$

multiplié par une puissance de e dont l'exposant sera

$$-\frac{\mathrm{E}_1 u^2}{2} - u\sum_{(r)}\zeta\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right) + \frac{u^2}{2}\sum_{(r)}\wp\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right),$$
$$(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

D'ailleurs l'expression (XXI_4) de $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ montre que l'on a

$$\text{E}_1 = \sum_{(r)} p\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right) - 2\text{P}_1, \qquad (r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1});$$

l'exposant de e se réduit donc à

$$\text{P}_1 u^2 - u \sum_{(r)} \zeta\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right).$$

Quant à la quantité $\sum\limits_{(r)} \zeta\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right)$, on démontrera qu'elle est égale à $\sum\limits_{(r)} \frac{2r+1}{n}\eta_1$, soit directement, comme plus haut, pour une somme analogue, soit en faisant $u = \frac{\omega_1}{n}$ dans l'expression de $\zeta\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$, qui devient alors égale à H_1 ou à $\eta_1 + \frac{2\omega_1}{n}\text{P}_1$. Finalement on a donc

$$(\text{XXI}_7)\quad \sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r+1}{n}\eta_1 + \text{P}_1 u^2} \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u + \frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right)},$$

$$r = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

Mais on a aussi

$$\frac{\sigma\left(u + \frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right)} = \frac{\sigma\left(u + \frac{2r+1-n}{n}\omega_1 + \omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1 + \omega_1\right)}$$

$$= e^{\eta_1 u} \frac{\sigma_1\left(u + \frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}{\sigma_1\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)},$$

à cause de la formule (XII_3), et par conséquent on peut encore écrire

$$(\text{XXI}_7)\quad \sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r+1-n}{n}\eta_1 + \text{P}_1 u^2} \prod_{(r)} \frac{\sigma_1\left(u + \frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}{\sigma_1\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}.$$

138. Si de même on remplace dans la formule (XVII_1) α par 2.

ω_1 par $\frac{\omega_1}{n}$ $\left(\text{ce qui change } s \text{ en } s = 2\mu\frac{\omega_1}{n} + 2\nu\omega_3\right)$, puis, simultanément, u par $-u$ et s par $-$s, on reconnaît que le produit des facteurs primaires qui correspondent aux nombres $\mu \equiv -r (\text{mod}. n)$, c'est-à-dire aux indices s pour lesquels on a

$$s - \frac{\omega_1}{n} - \omega_3 = s - \frac{2r+1}{n}\omega_1 - \omega_3,$$

est égal au produit de

$$\frac{\sigma\left(u + \frac{2r+1}{n}\omega_1 + \omega_3\right)}{\sigma\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1 + \omega_3\right)} = \frac{\sigma\left(u + \frac{2r+1-n}{n}\omega_1 - \omega_2\right)}{\sigma\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1 - \omega_2\right)}$$
$$= e^{-\eta_2 u}\frac{\sigma_2\left(u + \frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}{\sigma_2\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}$$

par une puissance de e dont l'exposant est

$$-u\zeta\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1 + \omega_3\right) + \frac{u^2}{2}p\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1 + \omega_3\right).$$

On a d'ailleurs

$$E_2 = \sum_{(r)} p\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1 + \omega_3\right) - 2P_1,$$
$$\sum_{(r)}\zeta\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1 + \omega_3\right) = \sum_{(r)}\zeta\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1 - \omega_2\right)$$
$$= \sum_{(r)}\zeta_2\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right) - n\eta_2,$$
$$(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}),$$

et l'on trouve, toujours par le même mode de raisonnement,

$$\sum_{(r)}\zeta_2\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right) - \sum_{(r)}\frac{2r+1-n}{n}\eta_1 = 0:$$

en effet, le premier membre ne dépend manifestement pas du système de nombres incongrus (*modulo n*) choisis pour r_0, r_1, ...,

r_{n-1}, et l'on vérifie de suite que les deux sommes sont nulles, comme se composant de termes égaux et de signes contraires quand on prend pour ces nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

On a donc finalement

$$(\mathrm{XXI}_8)\quad \left\{\begin{aligned} &\sigma_2\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r+1-n}{n}\eta_1 + u^2 P_1} \prod_{(r)} \frac{\sigma_2\left(u + \dfrac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}{\sigma_2\left(\dfrac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}, \\ &(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}). \end{aligned}\right.$$

Enfin on trouve de même

$$(\mathrm{XXI}_9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sigma_3\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_1 + u^2 P_1} \prod_{(r)} \frac{\sigma_3\left(u + \dfrac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{2r}{n}\omega_1\right)}, \\ &(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}). \end{aligned}\right.$$

139. Les formules qui précèdent peuvent être transformées de diverses manières; mais, pour ces transformations, il convient de distinguer le cas où n est pair de celui où il est impair.

Il suffit d'ailleurs de considérer le cas où n est impair (¹) et celui où $n = 2$. En effet, si l'on sait exprimer les fonctions formées avec les périodes $\frac{2\omega_1}{n}$, $2\omega_3$ au moyen des fonctions formées avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ dans ces deux cas, on le saura toujours.

140. Soit d'abord $n = 2$. Nous supposerons, pour ce qui regarde les fonctions σ, ζ, p, que l'on prenne $r_1 = 1$; on aura d'ailleurs $2P_1 = e_1$; donc

$$(\mathrm{XXII}_1)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) &= e^{-u\eta_1 + \frac{e_1 u^2}{2}} \sigma u \frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma\omega_1} = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma u\, \sigma_1 u \\ &= e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{pu - e_1}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{XXII}_2)\quad \zeta\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) = e_1 u + \zeta u + \zeta_1 u;$$

$$(\mathrm{XXII}_3)\quad p\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) = pu + p(u+\omega_1) - e_1 = pu + \frac{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}{pu - e_1}.$$

(¹) Il suffirait même manifestement de ne considérer que le cas où n est *premier* impair, mais les formules qui suivent immédiatement ne seraient en rien simplifiées si nous faisions cette restriction.

Ces deux dernières formules donnent le moyen de calculer H_1, H_3, E_1, E_3 et l'on trouve successivement

$$(\mathrm{XXII}_4)\quad \begin{cases} \mathrm{H}_1 = \zeta\left(\dfrac{\omega_1}{2}\,\middle|\,\dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = \ \ \eta_1 + \dfrac{e_1\omega_1}{2}, \\ \mathrm{H}_3 = \zeta\left(\omega_3\,\middle|\,\dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = 2\eta_3 + e_1\omega_3; \end{cases}$$

$$(\mathrm{XXII}_5)\qquad \mathrm{E}_3 = p\,\omega_3 + p(\omega_3+\omega_1) - e_1 = e_3 + e_2 - e_1 = -2e_1,$$

$$\mathrm{E}_1 = p\frac{\omega_1}{2} + p\frac{3\omega_1}{2} - e_1 = p\frac{\omega_1}{2} + \frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{p\dfrac{\omega_1}{2} - e_1};$$

d'où, en se reportant à l'expression (XIV_3) de $p\frac{\omega_1}{2}$,

$$(\mathrm{XXII}_5)\qquad \mathrm{E}_1 = e_1 + 2\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}.$$

Enfin, puisque $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3$ doit être nul, on aura

$$(\mathrm{XXII}_5)\qquad \mathrm{E}_2 = e_1 - 2\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3},$$

formule qu'il serait d'ailleurs aisé d'obtenir directement.

La fonction $y = pu$ vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3);$$

la fonction

$$z = y + \frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{y-e_1},$$

doit donc vérifier l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4(z-\mathrm{E}_1)(z-\mathrm{E}_2)(z-\mathrm{E}_3),$$

résultat que le lecteur pourra établir directement.

141. Dans les formules relatives aux fonctions σ_1, σ_2, σ_3, nous supposerons $r_0 = 0$, $r_1 = 1$. On aura alors

$$\sigma_1\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\,\frac{\sigma_1\left(u-\dfrac{\omega_1}{2}\right)\sigma_1\left(u+\dfrac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_1^2\dfrac{\omega_1}{2}}.$$

En tenant compte de l'égalité (XV_2) pour $a = \frac{\omega_1}{2}$ et $\alpha = 1$,

$$\sigma_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma_1\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right) = \sigma_1^2 u\,\sigma_1^2\frac{\omega_1}{2} - (e_1-e_2)(e_1-e_3)\sigma^2 u\,\sigma^2\frac{\omega_1}{2},$$

des relations entre les carrés des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ et la fonction pu, enfin de la valeur trouvée pour $p\frac{\omega_1}{2}$ (XVI_2), on trouve sans peine les formules

$$(\mathrm{XXIII}_1)\begin{cases} \sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\left[\sigma_1^2 u - (e_1-e_2)(e_1-e_3)\dfrac{\sigma^2\frac{\omega_1}{2}}{\sigma_1^2\frac{\omega_1}{2}}\sigma^2 u\right] \\ \qquad = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\left[\sigma_1^2 u - \dfrac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p\frac{\omega_1}{2}-e_1}\sigma^2 u\right] \\ \qquad = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\left(\sigma_1^2 u - \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\sigma^2 u\right) \\ \qquad = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}\,\sigma_3^2 u - \sqrt{e_1-e_3}\,\sigma_2^2 u}{\sqrt{e_1-e_2}-\sqrt{e_1-e_3}} \\ \qquad = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\left(pu - e_1 - \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\right)\sigma^2 u. \end{cases}$$

De même

$$\sigma_2\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\frac{\sigma_2\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma_2\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_2^2\frac{\omega_1}{2}}.$$

Cette expression peut se transformer de diverses manières; par exemple, en remarquant que l'égalité (XV_3), dans laquelle on a permuté u et a, devient, pour $a = \frac{\omega_1}{2}$ et $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$,

$$\sigma_2\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma_2\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right) = \sigma_2^2\frac{\omega_1}{2}\sigma_1^2 u + (e_1-e_2)\sigma^2 u\,\sigma_3^2\frac{\omega_1}{2},$$

on trouve

$$\sigma_2\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\left[\sigma_1^2 u + (e_1-e_2)\frac{\sigma_3^2\frac{\omega_1}{2}}{\sigma_2^2\frac{\omega_1}{2}}\sigma^2 u\right]$$

$$= e^{\frac{e_1u^2}{2}}\left[\sigma_1^2 u + \frac{p\frac{\omega_1}{2}-e_3}{p\frac{\omega_1}{2}-e_2}(e_1-e_2)\sigma^2 u\right].$$

Après des réductions faciles et en faisant usage successivement des égalités (XVI_2), (XIV), (XI_4), on trouve encore

$$(XXIII_2)\quad \begin{cases} \sigma_2\left(u \,\middle|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\left(\sigma_1^2 u + \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\sigma^2 u\right) \\[2ex] \qquad = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\dfrac{\sqrt{e_1-e_3}\,\sigma_2^2 u + \sqrt{e_1-e_2}\,\sigma_3^2 u}{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_1-e_2}} \\[2ex] \qquad = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\sigma^2 u\left(pu - e_1 + \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\right). \end{cases}$$

Enfin on aura

$$(XXIII_3)\quad \begin{cases} \sigma_3\left(u \,\middle|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{-u\eta_1+\frac{e_1u^2}{2}}\sigma_3 u\,\dfrac{\sigma_3(u+\omega_1)}{\sigma_3\omega_1} = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\sigma_2 u\,\sigma_3 u \\[2ex] \qquad = e^{\frac{e_1u^2}{2}}\sigma^2 u\sqrt{pu-e_2}\sqrt{pu-e_3}. \end{cases}$$

Dans ces diverses formules les radicaux ont le sens précis qui a été adopté au n° 111 et elles ne supposent rien sur le signe de la partie imaginaire du rapport des périodes.

142. On pourrait obtenir de la même façon les formules relatives aux fonctions $\sigma\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{2}\right)$, $\sigma_\alpha\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{2}\right)$; mais on les déduit des précédentes, en remarquant que l'on a

$$\sigma\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3}{2},\ \omega_1\right),$$

$$\sigma_1\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = \sigma_3\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3}{2},\ \omega_1\right),$$

$$\sigma_2\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = \sigma_2\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3}{2},\ \omega_1\right),$$

$$\sigma_3\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = \sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3}{2},\ \omega_1\right),$$

en sorte qu'on obtiendra les formules cherchées en échangeant les indices 1 et 3 et laissant l'indice 2 invariable; il faut toutefois, si l'on veut n'écrire jamais que les radicaux $\sqrt{e_1-e_2}$, $\sqrt{e_1-e_3}$, $\sqrt{e_2-e_3}$, tenir compte, après avoir fait cet échange, des formules

(XIII$_2$), (X$_6$); on obtient ainsi

$$(\text{XXIV}_1)\quad \sigma\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma u\, \sigma_3 u = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{pu - e_3},$$

$$(\text{XXIV}_2)\quad \zeta\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e_3 u + \zeta u + \zeta_3 u,$$

$$(\text{XXIV}_3)\quad p\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = pu + p(u+\omega_3) - e_3 = pu + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{pu - e_3};$$

$$(\text{XXIV}_4)\ \begin{cases} \text{H}'_1 = \zeta\left(\omega_1 \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) & = 2\eta_1 + e_3\omega_1, \\ \text{H}'_3 = \zeta\left(\frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) & = \eta_3 + \frac{e_3\omega_3}{2}; \end{cases}$$

$$(\text{XXIV}_5)\ \begin{cases} \text{E}'_1 = p\left(\omega_1 \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) & = -2e_3, \\ \text{E}'_2 = p\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) & = e_3 - 2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}, \\ \text{E}'_3 = p\left(\frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) & \\ \quad = p\frac{\omega_3}{2} + p\frac{3\omega_3}{2} - e_3 & = e_3 + 2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3} \end{cases}$$

et

$$(\text{XXV}_1)\quad \sigma_1\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma_1 u\, \sigma_2 u = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{pu - e_1}\sqrt{pu - e_2},$$

$$(\text{XXV}_2)\ \begin{cases} \sigma_2\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \left(\sigma_3^2 u + \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma^2 u\right) \\ \qquad = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \dfrac{\sqrt{e_1 - e_3}\,\sigma_2^2 u - \sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma_1^2 u}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}} \\ \qquad = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u\left(pu - e_3 + \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\right), \end{cases}$$

$$(\text{XXV}_3)\ \begin{cases} \sigma_3\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \left(\sigma_3^2 u - \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma^2 u\right) \\ \qquad = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \dfrac{\sqrt{e_1 - e_3}\,\sigma_2^2 u + \sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma_1^2 u}{\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_2 - e_3}} \\ \qquad = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u\left(pu - e_3 - \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\right). \end{cases}$$

143. Supposons maintenant n impair.

Les formules qui donnent les expressions de

$$\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right), \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

peuvent alors être comprises dans une formule unique. En effet, les n nombres $2r+1-n$, $(r=r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$, qui figurent dans deux d'entre elles, sont tous des nombres pairs et la différence de deux quelconques d'entre eux n'est pas divisible par n; il en résulte que les n nombres $2r+1-n$ peuvent être regardés comme formant un système complet de nombres incongrus (*modulo* n), absolument comme les nombres r; inversement les éléments d'un tel système peuvent toujours être mis sous la forme précédente, en sorte que rien n'empêche d'écrire les trois formules (XXI_{7-9}) sous la forme unique

$$\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_1 + u^2 P_1} \prod_{(r)} \frac{\sigma_\alpha\left(u+\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_\alpha\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)},$$

$$(r=r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}), \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

On peut encore supposer $r_0 = 0$, les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ étant alors incongrus entre eux et incongrus à zéro (*modulo* n); alors les quatre formules relatives à

$$\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right), \qquad \sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$$

prennent la forme très symétrique

$$(\mathrm{XXVI}_1)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u+\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}, \\ \sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma_\alpha u \prod_{(r)} \frac{\sigma_\alpha\left(u+\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_\alpha\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}, \end{aligned}\right.$$

$$(r=r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}), \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Dans ces formules figurent $n-1$ nombres pairs $2r$ qui sont assujettis à la seule condition qu'aucun d'eux n'est divisible par n, non plus que la différence de deux quelconques d'entre eux. On pourrait, en détruisant à la vérité un peu la symétrie, introduire aussi bien $n-1$ nombres impairs $2r-1$ assujettis exactement aux mêmes conditions; il suffira pour cela de remplacer, dans les formules précédentes, $\frac{2r}{n}\omega_1$ par $\frac{2r-n}{n}\omega_1 + \omega_1$ et d'appliquer les

formules (XII_3) relatives à l'addition d'une demi-période; on trouvera sans peine, en observant que les $n-1$ nombres $2r-1$ sont tous des nombres impairs et que la différence de deux quelconques d'entre eux n'est pas divisible par n, de même que les $n-1$ nombres $2r-n$,

$$(\mathrm{XXVI}_2)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1+u^2\mathrm{P}_1}\,\sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma_1\left(u+\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma_1\left(\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1+u^2\mathrm{P}_1}\,\sigma_1 u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u+\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_2\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1+u^2\mathrm{P}_1}\,\sigma_2 u \prod_{(r)} \frac{\sigma_3\left(u+\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_3\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1+u^2\mathrm{P}_1}\,\sigma_3 u \prod_{(r)} \frac{\sigma_2\left(u+\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma_2\left(\dfrac{2r-1}{n}\omega_1\right)}.
\end{aligned}\right.$$

On pourra prendre, par exemple, pour les $n-1$ nombres $2r-1$ la suite

$$-n+2,\ -n+4,\ \ldots,\ -3;\ -1,\ 1,\ 3,\ \ldots,\ n-4,\ n-2.$$

144. Si dans les formules (XXVI_1) on prend pour les nombres $2r$ la suite

$$-n+1,\ -n+3,\ \ldots,\ -2;\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-1,$$

elles deviennent

$$(\mathrm{XXVI}_3)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{u^2\mathrm{P}_1}\sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u+\dfrac{2r}{n}\omega_1\right)\sigma\left(u-\dfrac{2r}{n}\omega_1\right)}{-\sigma^2\left(\dfrac{2r}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{u^2\mathrm{P}_1}\sigma_\alpha u \prod_{(r)} \frac{\sigma_\alpha\left(u+\dfrac{2r}{n}\omega_1\right)\sigma_\alpha\left(u-\dfrac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_\alpha^2\left(\dfrac{2r}{n}\omega_1\right)},\\
&\left(r=1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Il n'est pas même nécessaire de spécialiser autant les valeurs de r.

Choisissons, en effet, $\frac{n-1}{2}$ nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ tels qu'aucun d'eux ne soit divisible par n, non plus que la différence ou la *somme* de deux d'entre eux; cela est toujours possible, puisque les nombres $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ satisfont à ces conditions; il est clair que, parmi les $n-1$ nombres

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_{\frac{n-1}{2}}, \quad -r_1, \quad -r_2, \quad \ldots, \quad -r_{\frac{n-1}{2}},$$

aucun ne sera divisible par n, non plus que la différence de deux quelconques d'entre eux. En prenant ces $n-1$ nombres pour $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, on arrive évidemment aux mêmes formules que précédemment; seulement r, au lieu de prendre les valeurs 1, $2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, doit prendre les valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$.

Ceci posé, les formules précédentes montrent clairement que les fonctions $\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$, $\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ s'expriment, sauf le facteur exponentiel $e^{u^2 P_1}$, en fonction entière de σu, $\sigma_\alpha u$. On a, par exemple, en tenant compte des relations (VII_1, XI_4),

$$(\mathrm{XXVI}_4)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{u^2 P_1} \sigma^n u \prod_{(r)} \left[p u - p\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)\right] \\ &= e^{u^2 P_1} \sigma^n u \prod_{(r)} \left[\frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}\right] \\ &= e^{u^2 P_1} \sigma u \prod_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - \frac{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)} \sigma^2 u\right]. \end{aligned}\right.$$

De même, en tenant compte de la relation (XV_2) pour $a = \frac{2r}{n}\omega_1$ et de la relation (XI_4), on trouve

$$(\mathrm{XXVI}_5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) \\ &\quad = e^{u^2 P_1} \sigma_\alpha u \prod_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) \frac{\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)} \sigma^2 u\right] \\ &\quad = e^{u^2 P_1} \sigma_\alpha u \, \sigma^{n-1} u \prod_{(r)} \left[p u - e_\alpha - \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{p\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right) - e_\alpha}\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans ces diverses formules, r doit prendre les valeurs 1, 2, ..., $\frac{n-1}{2}$ ou, si l'on veut, les valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ définies plus haut.

On pourrait transformer, d'une façon analogue, les formules où figurent des multiples impairs de $\frac{2\omega_1}{n}$; nous ne nous y arrêterons pas.

145. Enfin, comme rien dans ce qui précède ne distingne les périodes ω_1, ω_3, on peut, en échangeant les indices 1 et 3 et laissant invariable l'indice 2, écrire

$$(\text{XXVII}_2)\quad \begin{cases} \sigma\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_3 + u^2 P_3}\, \sigma u \prod\limits_{(r)} \dfrac{\sigma\left(u + \dfrac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma\left(\dfrac{2r}{n}\omega_3\right)}, \\ \sigma_\alpha\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_3 + u^2 P_3}\, \sigma_\alpha u \prod\limits_{(r)} \dfrac{\sigma_\alpha\left(u + \dfrac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma_\alpha\left(\dfrac{2r}{n}\omega_3\right)}, \\ \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Dans ces formules, r doit prendre $n-1$ valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, dont aucune ne soit divisible par n non plus que la différence de deux quelconques d'entre elles.

Il est facile d'établir les relations

$$(\text{XXVII}_3)\quad \begin{cases} \text{H}'_1 = n\eta_1 + 2\omega_1 P_3, \\ \text{H}'_3 = \eta_3 + \dfrac{2\omega_3}{n} P_3. \end{cases}$$

Quant à P_3, il est défini par l'égalité

$$(\text{XXVII}_1)\qquad 2P_3 = \sum_{(r)} p\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right).$$

On peut écrire aussi

$$(\text{XXVII}_4)\quad \begin{cases} \sigma\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{u^2 P_3}\, \sigma u \prod\limits_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - \dfrac{\sigma_\alpha^2\left(\dfrac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma^2\left(\dfrac{2r}{n}\omega_3\right)} \sigma^2 u\right], \\ \sigma_\alpha\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{u^2 P_3}\, \sigma_\alpha u \prod\limits_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) \dfrac{\sigma^2\left(\dfrac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma_\alpha^2\left(\dfrac{2r}{n}\omega_3\right)} \sigma^2 u\right]. \end{cases}$$

Dans ces formules, r doit prendre $\frac{n-1}{2}$ valeurs dont aucune ne soit divisible par n non plus que la somme ou la différence de deux quelconques d'entre elles.

Si l'on porte l'attention sur la formule

$$\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{u^2 P_1} \sigma^n u \prod_{(r)} \left[pu - p\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)\right],$$

on voit que la solution du problème posé ne dépend plus que de la recherche de la quantité

$$P_1 = p\left(\frac{2\omega_1}{n}\right) + p\left(\frac{4\omega_1}{n}\right) + \ldots + p\left[\frac{(n-1)\omega_1}{n}\right],$$

et des fonctions symétriques des quantités dont P_1 est la somme, fonctions symétriques qui entrent dans le produit qui figure dans le second membre. C'est là un problème d'Algèbre, sur lequel nous aurons à revenir plus tard, et dont la solution, lorsque n est premier, dépend d'une équation de degré $n+1$.

146. Les pages qui précèdent mettent en évidence l'importance de l'opération qui consiste à substituer au couple de demi-périodes (ω_1, ω_3) le couple $(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \gamma\omega_1 + \delta\omega_3)$. Nous aurons besoin plus tard de connaître quelques notations et propositions concernant la théorie de ces substitutions ; nous les rassemblerons, à la fin de ce Chapitre, dans les numéros qui suivent, afin de ne pas être obligés, quand nous aurons à les invoquer, d'interrompre la suite naturelle des raisonnements.

Désignons par x, y deux quantités quelconques ; ce seront, si l'on veut, des indéterminées, ou bien, comme dans les n^{os} 123 et suivants, des nombres à rapport imaginaire. Nous appellerons *substitution* [1] l'opération qui consiste à remplacer ces quantités x, y par deux autres qui en soient des fonctions linéaires à coefficients déterminés et de déterminant non nul ; si, par exemple, nous remplaçons x, y respectivement par $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$, nous dési-

---

[1] Le mot *substitution* a une signification beaucoup plus générale que nous n'avons pas à développer ici.

gnerons cette opération par le symbole

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Nous emploierons souvent une seule lettre pour désigner la même opération; si nous écrivons, par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

nous entendrons simplement que l'opération S est la même que l'opération

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Si nous effectuons cette opération sur x, y et si nous effectuons ensuite sur les quantités $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$, l'opération

$$S' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

cela reviendra à remplacer $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ par

$$\begin{aligned} \alpha'(\alpha x + \beta y) + \beta'(\gamma x + \delta y) &= (\alpha'\alpha + \beta'\gamma)x + (\alpha'\beta + \beta'\delta)y, \\ \gamma'(\alpha x + \beta y) + \delta'(\gamma x + \delta y) &= (\gamma'\alpha + \delta'\gamma)x + (\gamma'\beta + \delta'\delta)y, \end{aligned}$$

et l'on aura finalement remplacé x, y par les seconds membres des équations précédentes, c'est-à-dire qu'on aura effectué sur x, y l'opération

$$\begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix}.$$

La double opération qui consiste à effectuer sur x, y l'opération S, puis sur les quantités qui remplacent alors x, y l'opération S', s'écrit

$$S'S = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix},$$

les opérations s'effectuant dans le sens indiqué par leurs symboles en allant de la droite vers la gauche. Le déterminant de la substitution S'S est égal au produit des déterminants des substitutions

S et S'. Il est essentiel de remarquer que les deux symboles S'S et SS' désignent en général des opérations différentes.

Si S'' est un troisième symbole de substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

on désignera par le symbole

$$S''S'S$$

l'opération qui consiste à effectuer sur x, y l'opération S, puis sur les quantités ainsi obtenues l'opération S', puis sur les résultats l'opération S'', ce qui donne finalement

$$\begin{gathered}\alpha''[(\alpha'\alpha+\beta'\gamma)x+(\alpha'\beta+\beta'\delta)y]+\beta''[(\gamma'\alpha+\delta'\gamma)x+(\gamma'\beta+\delta'\delta)y],\\ \gamma''[(\alpha'\alpha+\beta'\gamma)x+(\alpha'\beta+\beta'\delta)y]+\delta''[(\gamma'\alpha+\delta'\gamma)x+(\gamma'\beta+\delta'\delta)y].\end{gathered}$$

Cela revient encore à effectuer sur x, y une certaine substitution linéaire dont il est bien aisé de calculer les coefficients.

Les substitutions S'S, S''S'S sont dites *composées* avec les substitutions S, S' ou S, S', S''. Il est clair que la notion de composition peut s'étendre de proche en proche à un nombre quelconque de substitutions.

Si S' et S représentent la même opération, c'est-à-dire si, en conservant les notations antérieures, on suppose

$$\alpha'=\alpha, \qquad \beta'=\beta, \qquad \gamma'=\gamma, \qquad \delta'=\delta$$

(ce que l'on écrit plus rapidement $S'=S$), on convient d'écrire S^2 à la place de SS; de même S^3 a le même sens que SSS. On comprend dès lors ce que signifie un symbole tel que

$$S'''^{p_3}S''^{p_2}S'^{p_1}S^{p},$$

où p, p_1, p_2, p_3 sont des nombres entiers positifs; on doit effectuer sur x, y l'opération S une première fois, puis encore cette même opération sur les résultats, etc., en tout, p fois; puis, sur les résultats, l'opération S' une première fois, sur les résultats encore la même opération S' une seconde fois, etc., en tout p' fois, etc.

Il est à remarquer qu'on peut écrire

$$S''S'S=S''(S'S), \qquad S''S'S=(S''S')S,$$

les parenthèses indiquant que les opérations multiples dont elles enferment les symboles doivent être remplacées par une seule opération : la première égalité n'exprime pas autre chose que la définition même du symbole $S''S'S$; la deuxième veut dire que l'opération $S''S'S$ revient à effectuer d'abord l'opération S, puis, sur les résultats, l'opération $S''S'$. Cela est à peu près évident, et se vérifie d'ailleurs sans difficulté.

Il résulte aisément de là que, dans un *produit symbolique* de substitutions, on peut grouper ensemble plusieurs *facteurs* consécutifs (¹).

147. En supposant toujours

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

on désigne par S^{-1} un symbole de substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

tel que l'on ait

$$S^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit alors, par ce qui précède, que les nombres α', β', γ', δ' sont déterminés par les quatre équations

$$\alpha'\alpha + \beta'\gamma = 1, \qquad \alpha'\beta + \beta'\delta = 0,$$
$$\gamma'\alpha + \delta'\gamma = 0, \qquad \gamma'\beta + \delta'\delta = 1.$$

En résolvant les deux premières par rapport à α', β' et les deux

(¹) En conservant les mêmes notations, l'opération précédente $S''S'S$, par exemple, peut être définie d'une façon un peu différente : on suppose que les opérations partielles que l'on va décrire s'effectuent non plus de droite à gauche, mais bien de *gauche à droite*.

Partons des formes linéaires $\alpha''x + \beta''y$, $\gamma''x + \delta''y$, dont les coefficients sont les éléments du *premier* symbole (en partant de la gauche) S''; remplaçons-y les variables x, y par les expressions linéaires $\alpha'x + \beta'y$, $\gamma'x + \delta'y$, dont les coefficients sont les éléments du *second* symbole S'; puis, dans les formes transformées, mettons encore, à la place de x, y, les expressions linéaires $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ dont les coefficients sont les éléments du *troisième* symbole S; les coefficients des formes finales seront les éléments du symbole composé $S''S'S$.

autres par rapport à γ', δ' et en désignant par $\mathfrak{D}$ le déterminant

$$\mathfrak{D} = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

il vient

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta}{\mathfrak{D}}, & -\dfrac{\beta}{\mathfrak{D}} \\ -\dfrac{\gamma}{\mathfrak{D}}, & \dfrac{\alpha}{\mathfrak{D}} \end{pmatrix}.$$

Il importe de remarquer que la substitution inverse de S^{-1} est S; en d'autres termes, on a

$$S^{-1}S = SS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On désigne par S^0 la substitution *identique* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui n'altère pas les variables.

Le symbole S^n a été défini pour n entier positif ou nul; on convient de donner au symbole S^{-n} le même sens qu'à $(S^{-1})^n$. Il est aisé de voir que, quels que soient les entiers positifs, nuls ou négatifs, m et n, on a

$$S^m S^n = S^{m+n}.$$

Cette égalité est évidente quand m, n sont positifs ou nuls; bornons-nous donc à établir l'égalité

$$S^n S^{-n} = S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où il est aisé de déduire ensuite les autres cas. En supposant par exemple $n = 3$, on aura

$$S^3 S^{-3} = SSSS^{-1}S^{-1}S^{-1} = SS(SS^{-1})S^{-1}S^{-1};$$

comme $SS^{-1} = S^0$ est la substitution identique, on peut évidemment la supprimer et l'on a ensuite

$$SSS^{-1}S^{-1} = S(SS^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = S^0:$$

le raisonnement est général.

Observons encore que l'égalité

$$S''S'S = T,$$

où S, S′, S″, T sont des symboles de substitution, entraîne l'égalité

$$S'' = TS^{-1}S'^{-1}:$$

on tire, en effet, de la première égalité

$$S''S'SS^{-1}S'^{-1} = TS^{-1}S'^{-1},$$

et le premier membre peut s'écrire successivement

$$S''S'(SS^{-1})S'^{-1} = S''S'S'^{-1} = S''(S'S'^{-1}) = S''.$$

La même égalité entraîne la suivante :

$$S = S'^{-1}S''^{-1}T.$$

148. Les substitutions de cette nature, à coefficients entiers, à déterminant $+1$, jouent, comme on l'a déjà vu aux nos 124 et suivants, un rôle particulièrement important : elles méritent de nous arrêter quelque peu. D'abord, on voit qu'en composant entre elles deux pareilles substitutions, on trouve une substitution qui appartient au même type, puisque les coefficients en sont encore entiers et que son déterminant est égal à *un* comme produit des déterminants des substitutions proposées.

Parmi les substitutions de ce type, on peut signaler les suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est très remarquable qu'on puisse les obtenir toutes en combinant deux de celles-là, les deux premières, par exemple, et leurs puissances positives et négatives.

Que la dernière se ramène aux deux premières, c'est ce qui résulte de l'identité, bien facile à vérifier,

$$V = TUT.$$

On tire de là

$$V^{-1} = T^{-1}U^{-1}T^{-1}.$$

Par suite, toute puissance positive ou négative de V s'exprimera en composant les substitutions T, U et leurs puissances.

Avant de démontrer la proposition énoncée, observons tout

d'abord que l'on a

$$U^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} U^2 = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ \gamma+\delta & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta+\alpha \\ \gamma & \delta+\gamma \end{pmatrix}.$$

On tire aisément de ces dernières égalités

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T^n = \begin{pmatrix} \alpha+n\beta & \beta \\ \gamma+n\delta & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} V^n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta+n\alpha \\ \gamma & \delta+n\gamma \end{pmatrix},$$

et, en particulier,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \quad V^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces diverses relations sont d'ailleurs vraies, que n soit positif ou négatif.

149. Ceci posé, nous établirons la proposition que nous avons en vue dans un cas particulier auquel nous ramènerons tous les autres, celui où l'un des nombres α, β est nul. Puisque $\alpha\delta - \beta\gamma$ est égal à un, on doit avoir, si α est nul, soit

$$\beta = 1, \quad \gamma = -1,$$

soit

$$\beta = -1, \quad \gamma = 1;$$

et si β est nul, on doit avoir, soit

$$\alpha = 1, \quad \delta = 1,$$

soit

$$\alpha = -1, \quad \delta = -1.$$

On a donc à considérer les quatre substitutions

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix},$$

où γ et δ désignent des entiers positifs ou négatifs quelconques.

La deuxième et la quatrième se ramènent à la première et à la troisième, puisque l'on a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix} U^2,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} U^2.$$

D'ailleurs, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = T^\gamma$$

et, d'un autre côté,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix} V^\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

par conséquent

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix} = UV^{-\delta}.$$

Par suite, le théorème est démontré, dans le cas où l'un des nombres α, β est nul.

150. Plaçons-nous maintenant dans le cas général.

L'identité

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T^{-n} = \begin{pmatrix} \alpha - n\beta & \beta \\ \gamma - n\delta & \delta \end{pmatrix}$$

montre que l'on peut mettre $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T^{-n}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta \\ \gamma_1 & \delta \end{pmatrix},$$

où α_1 est, en valeur absolue, le reste de la division de α par β. Si ce reste est nul, on s'arrêtera là ; sinon, on emploiera la relation

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta \\ \gamma_1 & \delta \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha_1 \\ -\delta & \gamma_1 \end{pmatrix},$$

et, en multipliant à droite par une puissance convenable T^{-n_1}, on

mettra le second membre sous la forme

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix},$$

où β_1 est, en valeur absolue, le reste de la division de $-\beta$ par α_1, en sorte que l'on aura

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} T^{-n} U T^{-n_1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} T^{n_1} U^{-1} T^{n}.$$

Si β_1 est nul, le théorème est vérifié, puisque alors la substitution $\begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ s'obtient en composant les substitutions T, U et leurs puissances. Si β_1 n'est pas nul, on continuera de la même façon, et, comme α_1 est plus petit que β, on parviendra toujours à mettre la substitution proposée sous la forme annoncée, après un nombre fini d'opérations.

FIN DU TOME PREMIER.

17823 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.